
Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204

Revisão Probabilidade

Camilo Daleles Rennó

camilo.renno@inpe.br

acesso do conteúdo do curso em [Bibdigital do INPE](#) ou [GitHub](#)

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado 100 vezes, observando-se os valores obtidos



Sequência obtida: 1 5 6 3 4 1 1 2 3 6 3 2 1 2 5 5 4 6... 4

Suponha que o interesse nesse experimento seja avaliar o quanto este dado é honesto

Neste caso, a ordem dos valores não é importante e podemos reorganizar os resultados na forma de uma tabela

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado 100 vezes, observando-se os valores obtidos

Valor	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
1	15	0,15
2	19	0,19
3	16	0,16
4	14	0,14
5	19	0,19
6	17	0,17
Total	100	1

E se continuássemos
sorteando novos valores?

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado 1000 vezes, observando-se os valores obtidos

Valor	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
1	158	0,158
2	168	0,168
3	166	0,166
4	146	0,146
5	178	0,178
6	184	0,184
Total	1000	1

Após 1000 sorteios...

E se o experimento fosse repetido infinitamente?

Frequência Absoluta e Relativa

Experimento: jogar um dado infinitas vezes, observando-se os valores obtidos

Valor	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
1		?
2		?
3		?
4		?
5		?
6		?
Total	∞	1

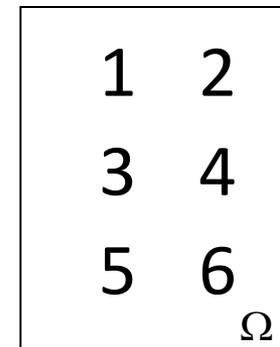
Se o dado fosse honesto, não haveria motivos para pensar que um valor ocorreria mais que outro

Freq. Rel. \rightarrow Probabilidade

Probabilidade

Experimento: jogar um dado e observar seu valor.

Valor	Probabilidade
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Total	1



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

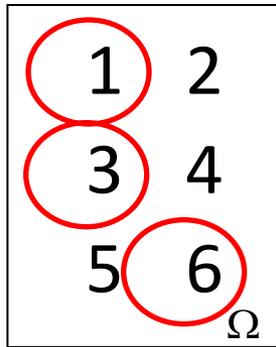
$$P(\text{evento}) = \frac{\# \text{eventos favoráveis}}{\# \text{eventos possíveis}}$$

$$0 \leq P(\text{evento}) \leq 1$$

$$\sum_i P(\text{evento } i) = 1$$

Probabilidade

Experimento: jogar um dado e observar seu valor.



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P = \frac{\# \text{eventos favoráveis}}{\# \text{eventos possíveis}}$$

- Qual a probabilidade de obter um valor igual a 1?

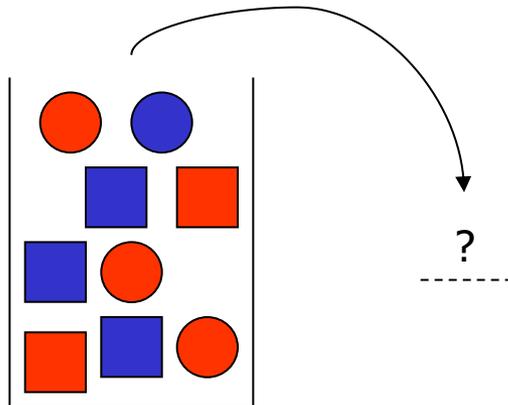
$$P(\text{valor igual a 1}) = \frac{1}{6}$$

- Qual a probabilidade de obter um valor múltiplo 3?

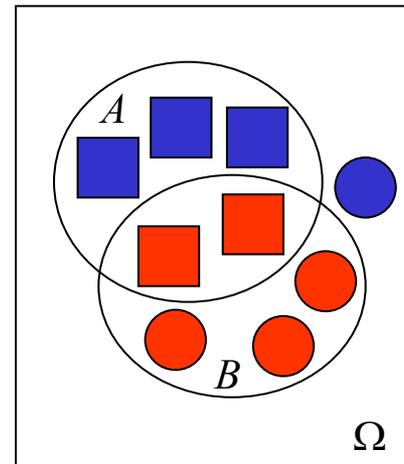
$$P(\text{valor múltiplo 3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidade

Experimento: retira-se um objeto a urna...



Qual a probabilidade do objeto selecionado ser quadrado ou ser vermelho?



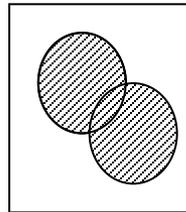
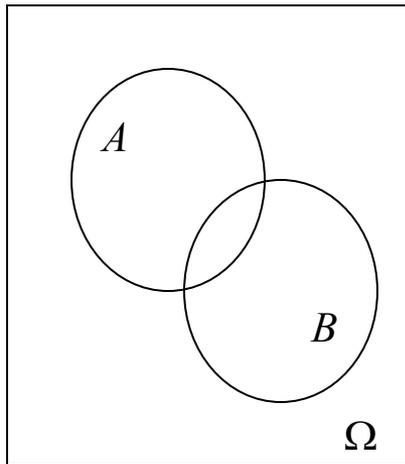
A = objeto quadrado
 B = objeto vermelho

$$P(A \cup B) = ?$$

Probabilidade

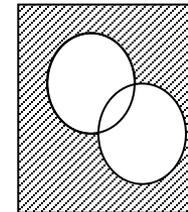
Diagrama de Venn

O elemento escolhido...



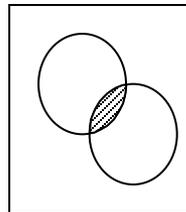
é A ou é B

$$A \cup B$$



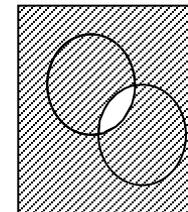
não é nem A
nem B

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



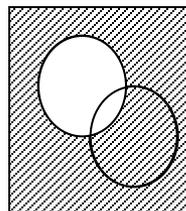
é A e B
simultaneamente

$$A \cap B$$



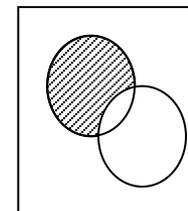
não é A e B
simultaneamente

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



não é A

$$\bar{A}$$



é somente A

$$A \cap \bar{B}$$

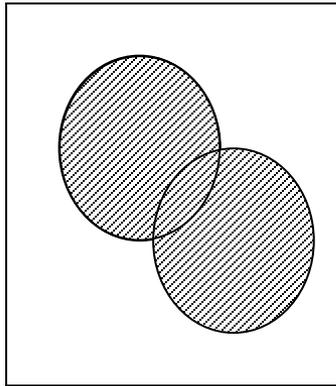
Probabilidade

$$P(A \cup B) = ?$$

$$P(A \cap B) = ?$$

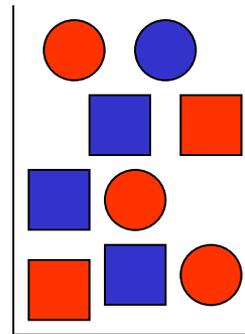
$$P(\bar{A}) = ?$$

Probabilidade



$$A \cup B$$

Exemplo:



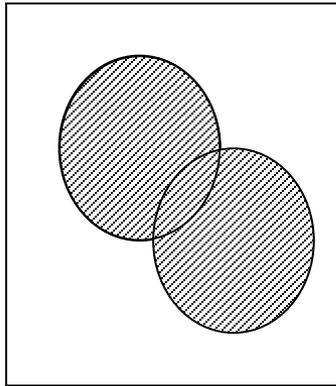
Qual a probabilidade do objeto selecionado ser quadrado ou ser vermelho?

$$P(\text{Quadrado} \cup \text{Vermelho}) = \frac{8}{9}$$

$$P(\text{Quadrado} \cup \text{Vermelho}) = \cancel{P(\text{Quadrado})} + \cancel{P(\text{Vermelho})}$$

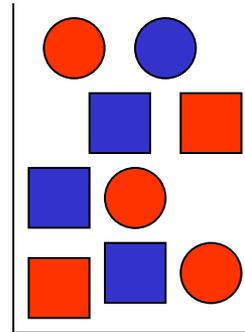
$$= \cancel{\frac{5}{9} + \frac{5}{9}} = \cancel{\frac{10}{9}} > 1?$$

Probabilidade



$$A \cup B$$

Exemplo:



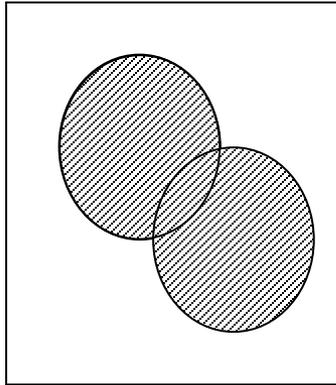
Qual a probabilidade do objeto selecionado ser quadrado ou ser vermelho?

$$P(\text{Quadrado} \cup \text{Vermelho}) = \frac{8}{9}$$

$$P(\text{Quadrado} \cup \text{Vermelho}) = P(\text{Quadrado}) + P(\text{Vermelho}) - P(\text{Quadrado} \cap \text{Vermelho})$$

$$= \frac{5}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

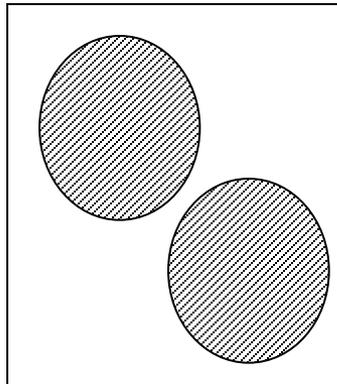
Probabilidade



$$A \cup B \equiv (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

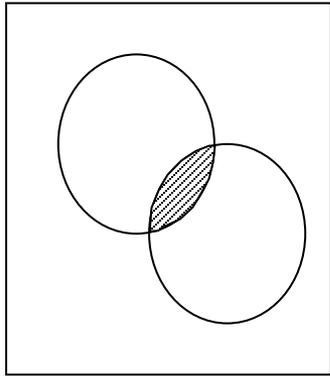
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



$$P(A \cap B) = 0 \quad \therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

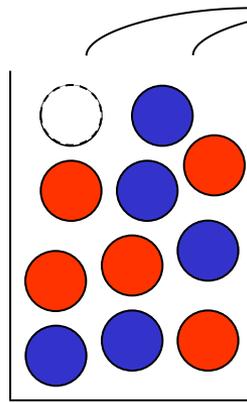
(eventos mutuamente exclusivos)

Probabilidade



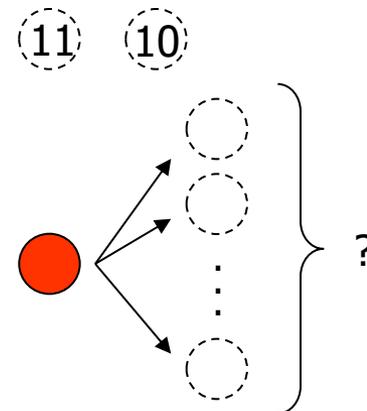
$$A \cap B$$

Exemplo:

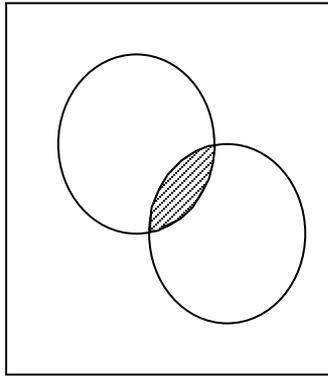


Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos (sem reposição)?

$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = \frac{?}{?}$$

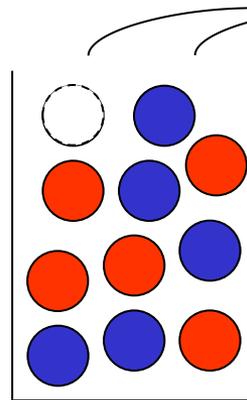


Probabilidade



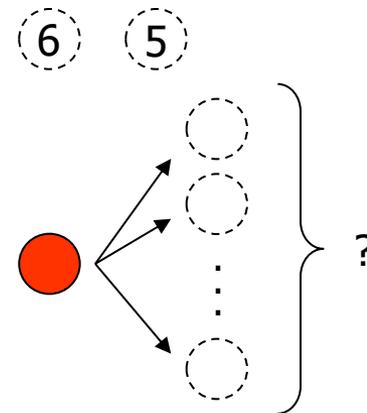
$$A \cap B$$

Exemplo:

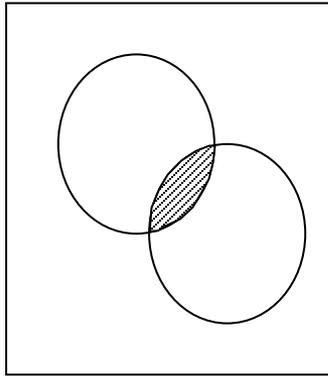


Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos (sem reposição)?

$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = \frac{?}{110}$$

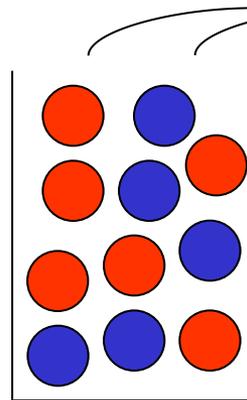


Probabilidade



$$A \cap B$$

Exemplo:



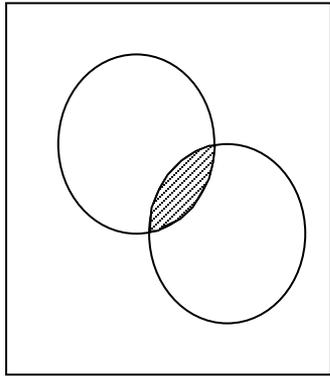
Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos (sem reposição)?

$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = \frac{30}{110}$$

$$\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{6.5}{11.10}$$

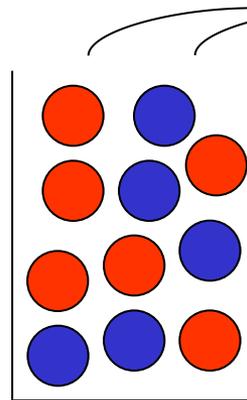
$$P(\text{Vermelho}_1)$$

Probabilidade



$$A \cap B$$

Exemplo:



Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos (sem reposição)?

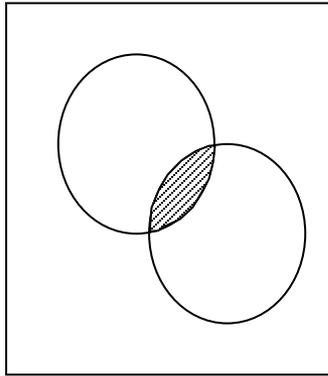
$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = \frac{30}{110}$$

$$\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{6.5}{11.10}$$

$P(\text{Vermelho}_2 \text{ sabendo que } \text{Vermelho}_1)$

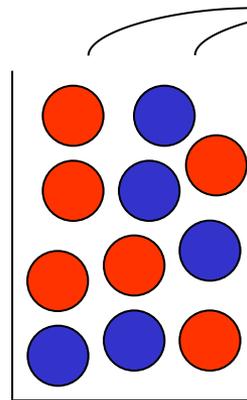
$P(\text{Vermelho}_2 / \text{Vermelho}_1)$

Probabilidade



$A \cap B$

Exemplo:



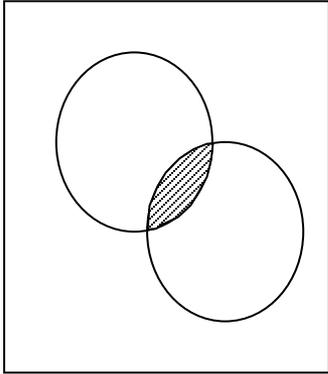
Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos (sem reposição)?

$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = \frac{30}{110}$$

$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = P(\text{Vermelho}_1) \cdot P(\text{Vermelho}_2 / \text{Vermelho}_1)$$

$$= \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{30}{110}$$

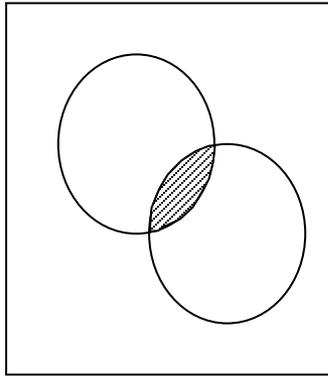
Probabilidade



$A \cap B$

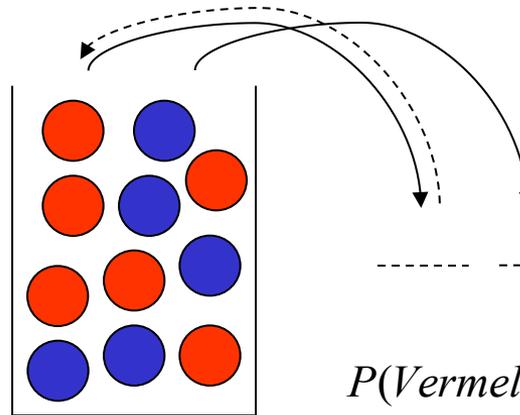
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B / A) \\ &= P(B) \cdot P(A / B) \end{aligned}$$

Probabilidade



$$A \cap B$$

Exemplo:



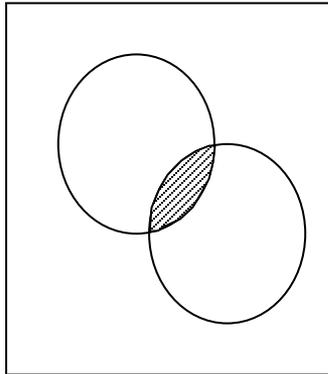
Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos (com reposição)?

$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = \frac{?}{?}$$

$$P(\text{Vermelho}_1 \cap \text{Vermelho}_2) = \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{11} \quad (\text{eventos independentes})$$

$$= P(\text{Vermelho}_1) \cdot P(\text{Vermelho}_2)$$

Probabilidade



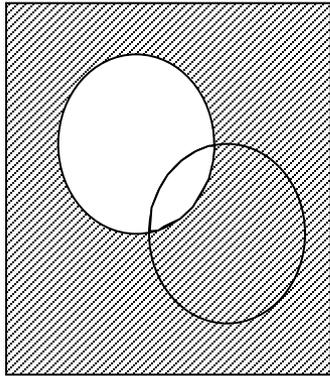
$A \cap B$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B / A) \\ &= P(B) \cdot P(A / B) \end{aligned}$$

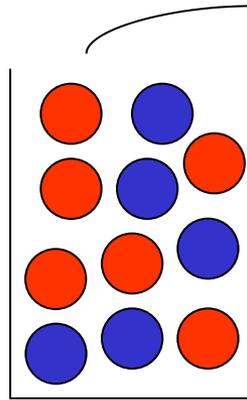
Se A e B são eventos independentes:

$$P(A / B) = P(A) \text{ e } P(B / A) = P(B) \quad \therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Probabilidade



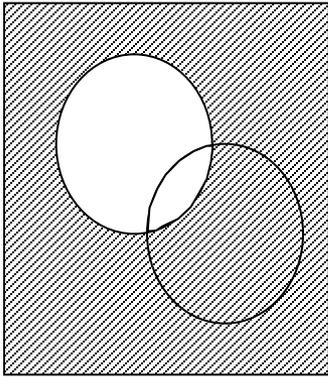
\bar{A}



Qual a probabilidade de escolher pelo menos 1 objeto vermelho?

$$\begin{aligned} P(\text{pelo menos 1 Vermelho}) &= P(1 \text{ Vermelho}) + P(2 \text{ Vermelhos}) + P(3 \text{ Vermelhos}) + \\ &\quad + P(4 \text{ Vermelhos}) + P(5 \text{ Vermelhos}) \\ &= P(1 \text{ Vermelho} \cap 4 \text{ Azuis}) + P(2 \text{ Vermelhos} \cap 3 \text{ Azuis}) + \\ &\quad + \dots + P(5 \text{ Vermelhos}) \\ &= 1 - P(5 \text{ Azuis}) \\ &= 1 - \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cong 0,9978 \end{aligned}$$

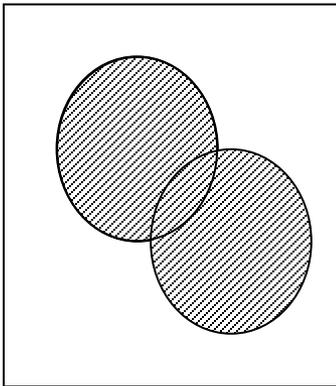
Probabilidade



\bar{A}

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Probabilidade

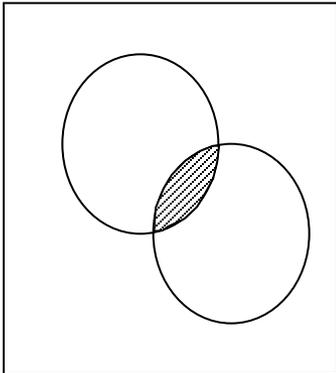


$A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

eventos
mutuamente
exclusivos

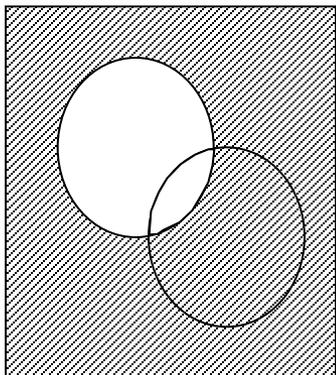


$A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

eventos
independentes



\bar{A}

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Probabilidade

Exercícios

- 1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A , B , C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A , 200 de B e 300 de C . Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
- a) seja da classe A ;
 - b) corresponda a uma queimada, sabendo que o ponto é da classe A ;
 - c) corresponda a uma queimada; e
 - d) seja da classe A , sabendo que o ponto corresponde a uma queimada.

Probabilidade

Exercícios

- 1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A , B , C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A , 200 de B e 300 de C . Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:

- a) seja da classe A ;

$$P(A) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

- b) corresponda a uma queimada, sabendo que o ponto é da classe A ;

$$P(Q/A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\%$$

Probabilidade

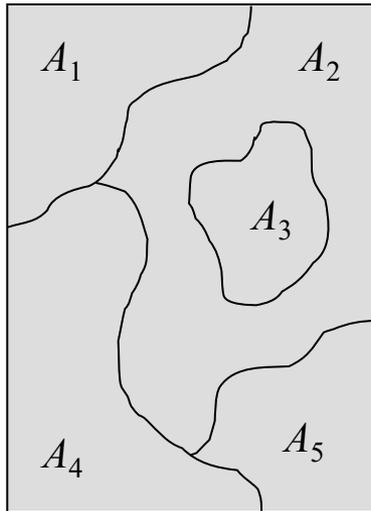
Exercícios

- 1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A , B , C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A , 200 de B e 300 de C . Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
- c) corresponda a uma queimada;

$$P(Q) = \frac{10 + 10 + 3}{600} = \frac{23}{600}$$

Probabilidade Total

Probabilidade Total



$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

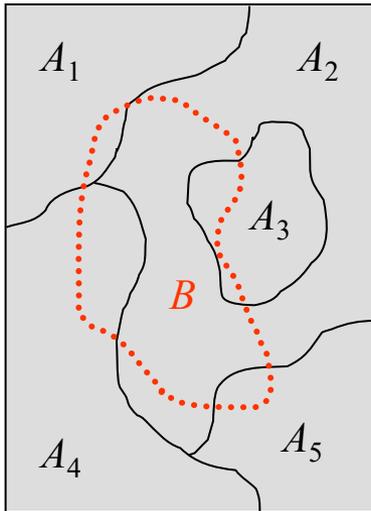
conjuntos disjuntos
eventos mutuamente exclusivos

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 1$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1$$

Probabilidade Total



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_5 \cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^5 P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^5 P(A_i) \cdot P(B / A_i)$$

Probabilidade

Exercícios

- 1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A , B , C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A , 200 de B e 300 de C . Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
- c) corresponda a uma queimada;

$$Q = (A \cap Q) \cup (B \cap Q) \cup (C \cap Q)$$

$$P(Q) = P(A \cap Q) + P(B \cap Q) + P(C \cap Q)$$

$$P(Q) = P(A) \cdot P(Q/A) + P(B) \cdot P(Q/B) + P(C) \cdot P(Q/C)$$

$$P(Q) = \frac{1}{6} \frac{10}{100} + \frac{2}{6} \frac{5}{100} + \frac{3}{6} \frac{1}{100} = \frac{10+10+3}{600} = \frac{23}{600}$$

Probabilidade

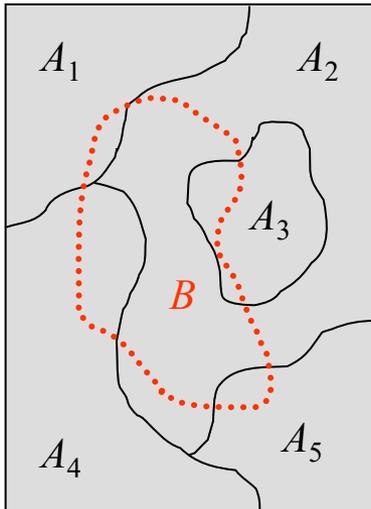
Exercícios

- 1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A , B , C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A , 200 de B e 300 de C . Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
- d) seja da classe A , sabendo que o ponto corresponde a uma queimada.

$$P(A/Q) = \frac{10}{23}$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes



$$P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B / A_i) = P(B) \cdot P(A_i / B)$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B / A_i)}{\sum_{j=1}^5 P(A_j) \cdot P(B / A_j)}$$

Obs.: o termo no numerador será um dos termos do denominador

Probabilidade

Exercícios

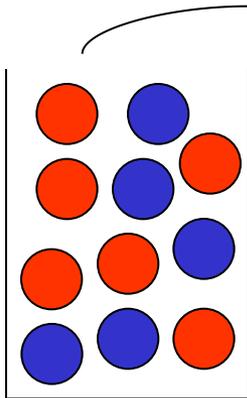
- 1) Num estudo sobre ocorrência de queimadas, 600 pontos foram escolhidos aleatoriamente e divididos em 3 grupos (A , B , C) de acordo com sua classe de uso do solo, sendo 100 de A , 200 de B e 300 de C . Suponha que a probabilidade de ocorrência de queimada em cada uma das classes seja respectivamente de 10%; 5% e 1%. Selecionando-se um ponto ao acaso, calcule a probabilidade de que esse ponto:
- d) seja da classe A , sabendo que o ponto corresponde a uma queimada.

$$P(A/Q) = \frac{P(A).P(Q/A)}{P(A).P(Q/A) + P(B).P(Q/B) + P(C).P(Q/C)}$$
$$P(A/Q) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{10}{100} + \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{100} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{10}{600} + \frac{10}{600} + \frac{3}{600}} = \frac{1}{23} = \frac{10}{600} \cdot \frac{600}{23} = \frac{10}{23}$$

Probabilidade

Exercícios

2)



Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3\text{Vermelhos} \Leftrightarrow 3\text{Vermelhos} \cap 2\text{Azuis}$$

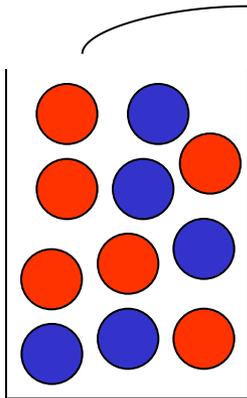
$$P(3\text{Vermelhos}) = \underbrace{P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)}_{?}$$

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) = \text{-----}$$

Probabilidade

Exercícios

2)



Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3\text{Vermelhos} \Leftrightarrow 3\text{Vermelhos} \cap 2\text{Azuis}$$

$$P(3\text{Vermelhos}) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)$$

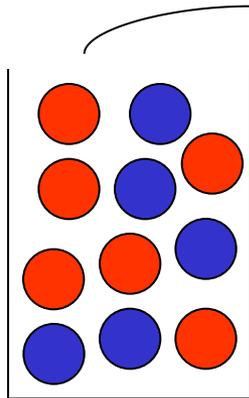
?

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{6}{11} \frac{5}{10} \frac{4}{9} \frac{4}{8} \frac{3}{7}$$

Probabilidade

Exercícios

2)



Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3\text{Vermelhos} \Leftrightarrow 3\text{Vermelhos} \cap 2\text{Azuis}$$

$$P(3\text{Vermelhos}) = \underbrace{P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)}_?$$

$$P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{6}{11} \frac{5}{10} \frac{4}{9} \frac{5}{8} \frac{4}{7}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5) = \frac{5}{11} \frac{4}{10} \frac{6}{9} \frac{5}{8} \frac{4}{7}$$

iguais!

Mas quantas vezes?

Técnicas de contagem

Técnicas de Contagem

A	A	E
I	U	O
I	O	O

De quantas formas posso rearranjar estas 9 letras?

Se fossem 9 letras diferentes:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! \\ \text{(sem reposição)}$$

Permutação

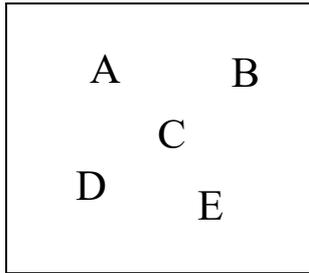
Permutação com repetição

$$\# \text{ grupos} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

$$n = \sum_{i=1}^k n_i$$

$$\# \text{ grupos} = \frac{9!}{2! 1! 2! 3! 1!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 15120 \\ \text{AEIOU}$$

Técnicas de Contagem



Quantos grupos de 2 letras é possível formar com estas 5 letras?

- A ordem é importante: **Arranjo**

{AB, AC, AD, AE, BA, BC, ..., ED}

$$\# \text{ grupos} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$

- A ordem não é importante: **Combinação**

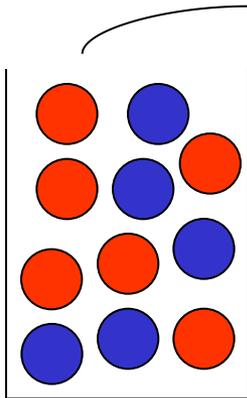
{AB, AC, AD, AE, BC, BD, ..., DE}

$$\# \text{ grupos} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Probabilidade

Exercícios

2)



Qual a probabilidade de escolher exatamente 3 objetos vermelhos?

$$3Vermelhos \Leftrightarrow 3Vermelhos \cap 2Azuis$$

$$P(3Vermelhos) = P(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap A_4 \cap A_5) + \dots + P(A_1 \cap A_2 \cap V_3 \cap V_4 \cap V_5)$$

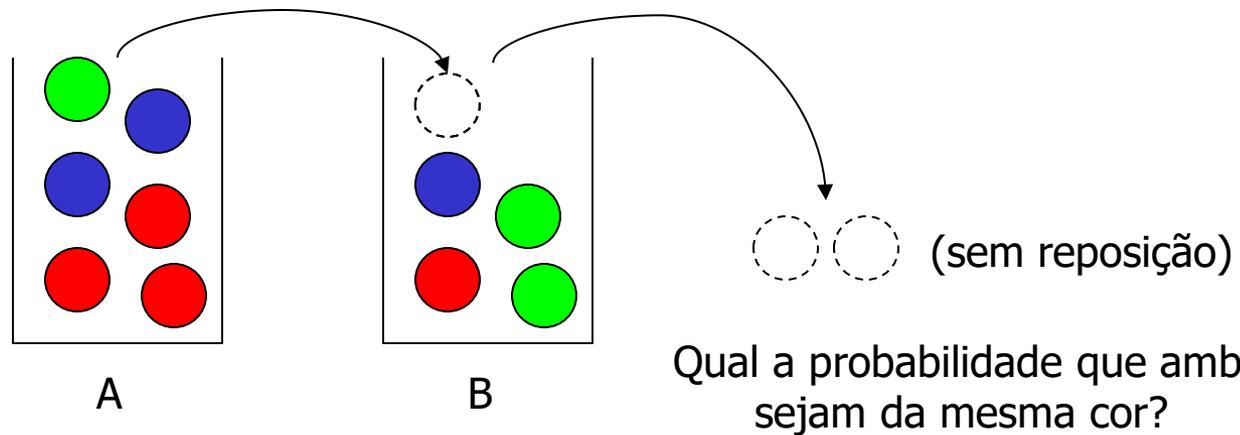
$$\frac{5!}{3!2!} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$$

$$P(3Vermelhos) = \frac{5!}{3!2!} \frac{6}{11} \frac{5}{10} \frac{4}{9} \frac{5}{8} \frac{4}{7}$$

Probabilidade

Exercícios

3)



$$M = (R_1 \cap R_2) \cup (G_1 \cap G_2) \cup (B_1 \cap B_2)$$

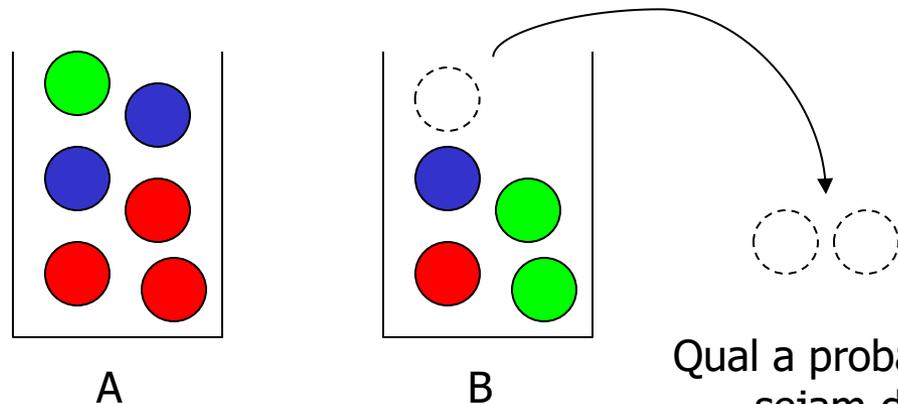
$$P(M) = P(R_1 \cap R_2) + P(G_1 \cap G_2) + P(B_1 \cap B_2)$$

$$P(M) = P(R_1)P(R_2 / R_1) + P(G_1)P(G_2 / G_1) + P(B_1)P(B_2 / B_1) \quad ???$$

Probabilidade

Exercícios

3)



$$M = (M_B \cap R_A) \cup (M_B \cap G_A) \cup (M_B \cap B_A)$$

$$P(M) = P(M_B \cap R_A) + P(M_B \cap G_A) + P(M_B \cap B_A)$$

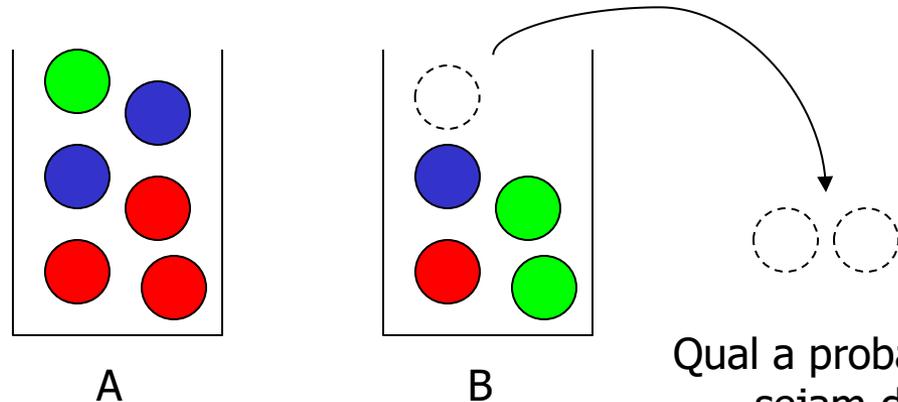
$$P(M) = P(R_A)P(M_B / R_A) + P(G_A)P(M_B / G_A) + P(B_A)P(M_B / B_A)$$

$$M_B = (R_{B1} \cap R_{B2}) \cup (G_{B1} \cap G_{B2}) \cup (B_{B1} \cap B_{B2})$$

Probabilidade

Exercícios

3)



Qual a probabilidade que ambas sejam da mesma cor?

$$P(M) = P(R_A)P(M_B / R_A) + P(G_A)P(M_B / G_A) + P(B_A)P(M_B / B_A)$$

$$M_B = (R_{B1} \cap R_{B2}) \cup (G_{B1} \cap G_{B2}) \cup (B_{B1} \cap B_{B2})$$

$$P(M) = \frac{3}{6} \left(\frac{2}{5} \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \frac{1}{4} + 0 \right) + \frac{1}{6} \left(0 + \frac{3}{5} \frac{2}{4} + 0 \right) + \frac{2}{6} \left(0 + \frac{2}{5} \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \frac{1}{4} \right)$$

$$P(M) = \frac{3}{6} \frac{4}{20} + \frac{1}{6} \frac{6}{20} + \frac{2}{6} \frac{4}{20} = \frac{26}{120} = \frac{13}{60}$$