Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204

Estatística Não Paramétrica

Camilo Daleles Rennó
camilo.renno@inpe.br
acesso do conteúdo do curso em Bibdigital do INPE ou GitHub

Escolha da Análise Estatística

Muitas vezes, determinar qual análise estatística usar para responder alguma questão não é simples.

O comportamento estatístico (distribuição) da variável estudada pode ser desconhecido e/ou seus parâmetros são de difícil estimação, ou então a variável não segue a distribuição exigida pela análise estatística selecionada.

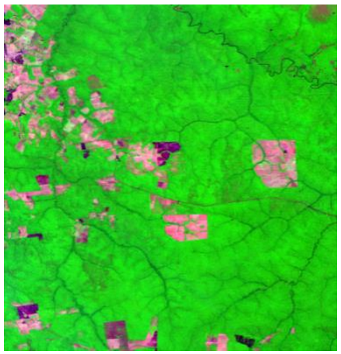
As vezes, determinar qual o parâmetro que representa bem o fenômeno estudado pode também não ser uma tarefa fácil. Por exemplo, em distribuições muito assimétricas, a média e a variância podem não representar bem o comportamento da variável estudada. Mediana e distância interquartil são alternativas nesses casos?

Em algumas situações, o tamanho da amostra é muito reduzido de modo que as propriedades estatísticas do estimador do parâmetro de interesse não podem ser garantidas (p.ex. Teorema do Limite Central)

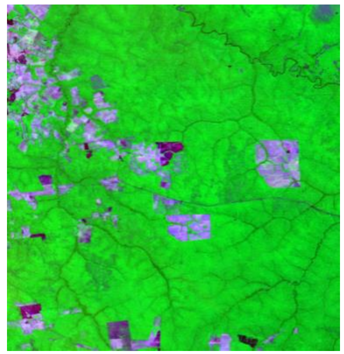
Vamos então analisar alguns exemplos...

Escolha da Análise Estatística

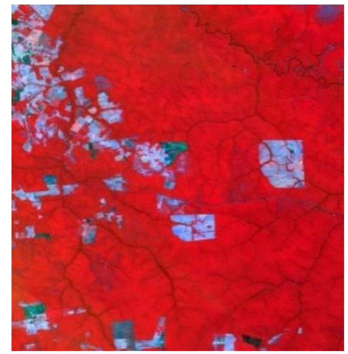
Exemplo 1



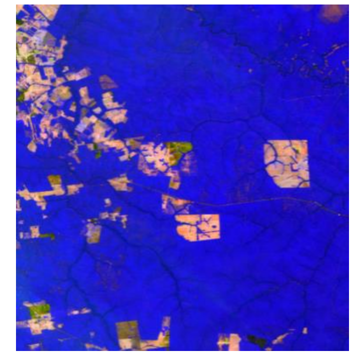
TM R5G4B3



TM R3G4B5



TM R4G3B5



TM R5G3B4

Qual destas composições coloridas tem a melhor interpretabilidade?
Depende de qual a aplicação...
a) Detecção de desmatamentos?
b) Avaliação de áreas degradadas?
c) Definição de níveis de regeneração?
d) Delimitação de corpos d'água?

Podemos dizer que há uma composição preferencial para uma dada aplicação?

Que tal se várias pessoas dessem uma nota a cada uma indicando quais elas mais preferem? Sendo 1 a melhor até 4 a pior

(1 – melhor; 4 – pior)

R5G4B3	R3G4B5	R4G3B5	R5G3B4
4	3	2	1
3	4	2	1
3	4	1	2
4	3	2	1
1	2	4	3
4	3	1	2
4	3	1	2
⋮	⋮	⋮	⋮
3	4	2	1

Será que há evidências para escolher a melhor?

Escolha da Análise Estatística

Exemplo 2

Duas amostras foram obtidas a partir de duas populações distintas:

Amostra 1: 1003, 545, 875, 442, 13, 1209, 996, 57, 2356, 397 (n_1 = 10)

Amostra 2: 233, 43, 157, 338, 113, 5, 99, 302, 475 (n_2 = 9)

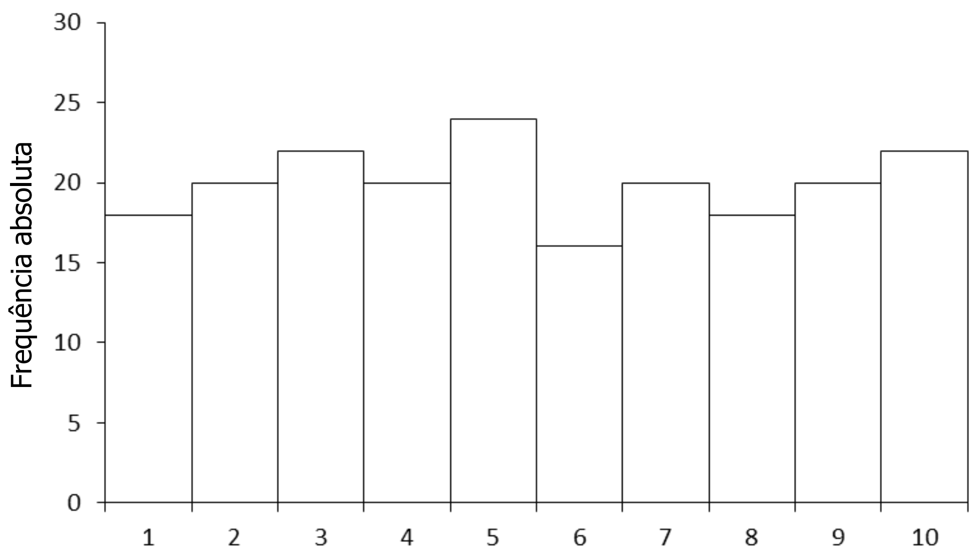
Podemos afirmar que a população 1 apresenta, em geral, uma tendência de ter valores maiores que a população 2?

Neste caso, não há nenhum conhecimento prévio sobre a natureza dos dados!

Escolha da Análise Estatística

Exemplo 3

A partir de uma amostra de 200 valores, obteve-se o seguinte histograma:



Podemos afirmar que esta amostra foi retirada de uma população com distribuição uniforme?

Estatística Paramétrica X Não Paramétrica

Estatísticas Paramétricas exigem grande número de condições para que sejam válidas e tenham alto poder ($1 - \beta$, probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 for falso). Estas condições, em geral, são supostas válidas (ou previamente testadas)

Por exemplo, a Análise de Variância (ANOVA) pressupõe:

independência das amostras;

tratamentos normalmente distribuídos; e

tratamentos homocedásticos (mesmas variâncias)

Estatísticas Não Paramétricas baseiam-se em suposições mais brandas e, quase sempre, consideram a ordem (posto ou *rank*) dos dados e não seus valores numéricos originais. Além disso, podem trabalhar diretamente com dados categóricos (classes)

OBS: quando as pressuposições são consideradas válidas, os testes paramétricos são sempre mais poderosos que seus correspondentes não paramétricos

Tipo de Mensuração

Nominal (Classes):

o atributo (numérico ou não) é usado apenas para identificar a que grupo ou classe cada elemento da população pertence

exemplo: classe de uso e ocupação (floresta, pastagem, água, cidade, etc)
tipo de água (branca, preta e clara)
código DDD

Ordinal (Postos ou *Rank*):

o atributo (numérico ou não) tem significado de posicionamento numa lista (crescente ou decrescente)

exemplo: nível de cinza de uma imagem
proximidade (junto, perto, longe)
ordem da bacia hidrográfica (método de Strahler)

Alguns Testes Não Paramétricos

Uma amostra

Teste de Aderência

Teste de Kolmogorov-Smirnov

testa adequação de distribuições

Duas amostras relacionadas

Teste dos Sinais

Teste de Wilcoxon

correspondente ao teste t pareado

Duas amostras independentes

Teste de Independência

Teste de Mann-Whitney → correspondente ao teste t

Teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras

compara a distribuição de duas amostras

Várias amostras relacionadas

Teste de Friedman

Várias amostras independentes

Teste de Kruskal-Wallis → correspondente a ANOVA

Teste de Dunn (comparações múltiplas)

correspondente ao teste Tukey

Medidas não-paramétricas de correlação

Coeficiente de contingência

Coeficiente de correlação de Spearman

Coeficiente de correlação de Kendall

Alguns Testes Não Paramétricos

Uma amostra

Teste de Aderência

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Duas amostras relacionadas

Teste dos Sinais

Teste de Wilcoxon

Duas amostras independentes

Teste de Independência

Teste de Mann-Whitney

Teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras

Várias amostras relacionadas

Teste de Friedman

Várias amostras independentes

Teste de Kruskal-Wallis

Teste de Dunn (comparações múltiplas)

Medidas não-paramétricas de correlação

Coeficiente de contingência

Coeficiente de correlação de Spearman

Coeficiente de correlação de Kendall

Teste de Aderência

Exemplo: Deseja-se testar a hipótese de que um dado seja honesto. Para tanto, joga-se o mesmo 1000 vezes anotando-se os resultados:

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	160	183	155	170	157	175	1000

$H_0 : p_i = 1/6 \quad (i = 1, 2, ..., 6)$ (dado honesto)

H_1: pelo menos algum $p_i \neq 1/6$

Se H_0 é verdadeira, então

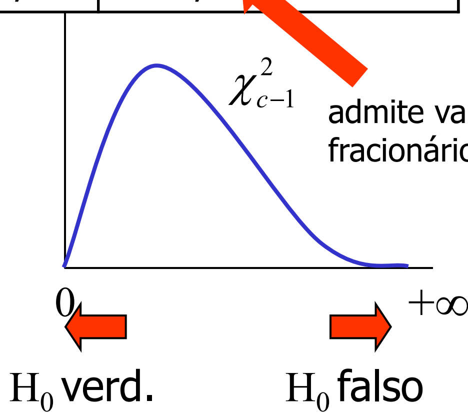
sempre valores inteiros!

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	160	183	155	170	157	175	1000
Freq. Abs. Esp.	166,67	166,67	166,67	166,67	166,67	166,67	1000

admite valores fracionários

$$\sum_{i=1}^{c} \frac{(FAObs_i - FAEsp_i)^2}{FAEsp_i} \sim \chi^2_{c-1}$$

c é o número de classes



Teste de Aderência

Exemplo: Deseja-se testar a hipótese de que um dado seja honesto. Para tanto, joga-se o mesmo 1200 vezes anotando-se os resultados:

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	160	183	155	170	157	175	1000

$H_0 : p_i = 1/6 \quad (i = 1, 2, ..., 6)$ (dado honesto)

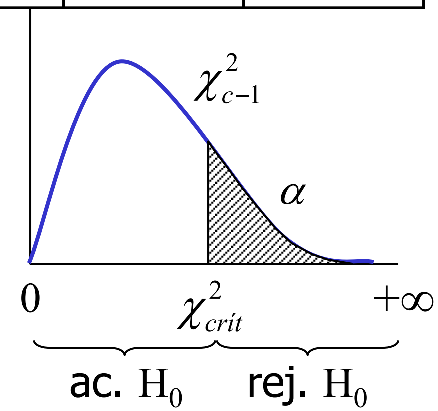
H_1: pelo menos algum $p_i \neq 1/6$

Se H_0 é verdadeira, então

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	160	183	155	170	157	175	1000
Freq. Abs. Esp.	166,67	166,67	166,67	166,67	166,67	166,67	1000

$$\sum_{i=1}^{c} \frac{\left(FAObs_i - FAEsp_i\right)^2}{FAEsp_i} \sim \chi^2_{c-1}$$

c é o número de classes



Teste de Aderência

Exemplo: Deseja-se testar a hipótese de que um dado seja honesto. Para tanto, joga-se o mesmo 1200 vezes anotando-se os resultados (tabela abaixo).

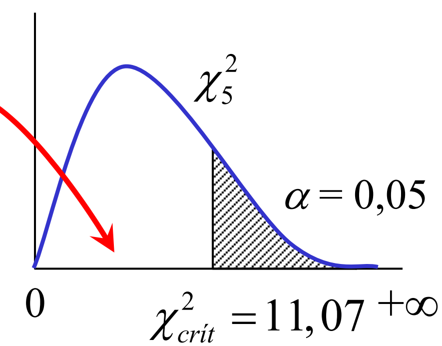
$H_0 : p_i = 1/6 \quad (i = 1, 2, ..., 6)$ (dado honesto)

$H_1 : p_i \neq 1/6$

Se H_0 é verdadeira, então

Valor do dado	1	2	3	4	5	6	
Freq. Abs. Obs.	160	183	155	170	157	175	1000
Freq. Abs. Esp.	166,67	166,67	166,67	166,67	166,67	166,67	1000

$$\chi^2 = \frac{(160 - 166,67)^2}{166,67} + \ldots + \frac{(175 - 166,67)^2}{166,67} = 3,73$$



Conclusão: considerando 5% de significância,
aceita-se H_0, ou seja,
não há razões para discordar que o dado seja honesto.

no R:

```
x <- c(160,183,155,170,157,175)
p <- rep(1/length(x), length(x))
chisq.test(x,p=p)
```

- Chi-squared test for given probabilities
- data: x
- X-squared = 3.728, df = 5, p-value = 0.5892

Teste de Aderência

OBSERVAÇÕES:

- Ideal para testar distribuições discretas
- Para variáveis aleatórias contínuas, deve-se agrupar os dados em 2 a 20 classes excludentes (é desejável que as classes sejam equiprováveis);
- Com apenas 2 classes, o valor esperado de cada uma deve ser ≥ 5;
- Considerando-se mais que 2 classes, não mais de 20% dos valores esperados devem ser menores que 5, e nenhum deve ser nulo;
- Este teste não é sensível ao ordenamento das classes; e
- Caso o teste seja usado para verificar a adequação do uso de alguma distribuição específica com parâmetros desconhecidos, perde-se também 1 grau de liberdade para cada parâmetro estimado. Ex: para testar uma distribuição que possui 2 parâmetros desconhecidos, o teste de aderência teria c - 3 graus de liberdade.

Teste de Aderência

Apesar do valor crítico deste teste depender apenas no número de classes avaliadas, o tamanho da amostra é muito importante pois aumenta a sensibilidade do teste rejeitar hipóteses nulas falsas (erro β)

Suponha que uma distribuição quase uniforme seja testada. Qual a probabilidade dela ser erroneamente definida como uniforme? Qual o erro β?

Considere essa distribuição teórica (quase uniforme):

	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	15%	17%	17%	17%	17%	17%

Teste de Aderência

	1	2	3	4	5	6
H_0	16,67%	16,67%	16,67%	16,67%	16,67%	16,67%
H_1	15%	17%	17%	17%	17%	17%

← distribuição uniforme

Qual a probabilidade de uma amostra retirada de uma distribuição definida em H_1, seja considerada uniforme (H_0) considerando α = 5%?

no R:

```
s <- c(rep(1,15),rep(2,17),rep(3,17),rep(4,17),rep(5,17),rep(6,17))
n<-30   ← tamanho da amostra
r<-10000 ← número de simulações
acH0<-0
for (i in 1:r) {
   amostra<-sample(s,size=n,replace=T)
   h<-hist(amostra,plot=F,breaks=c(1,2,3,4,5,6,7)-.5)$counts
   qui<-sum(((h-n/6)^2)/(n/6))
   if (qui < qchisq(.95,5)) acH0<-acH0+1
}
acH0/r  ← proporção de vezes em que H0 é aceita indevidamente (erro β)
```

Resultado:

n	erro β
30	94,80%
100	94,20%
1000	84,40%
5000	30,99%
10000	4,30%

Teste de Aderência / Teste de Normalidade

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

2,2	4,1	3,5	4,5	5,0	3,7	3,0	2,6	3,4	1,6
3,1	3,3	3,8	3,1	4,7	3,7	2,5	4,3	4,9	3,6
2,9	3,3	3,9	3,1	4,8	3,1	3,7	4,4	3,2	4,1
1,9	3,4	4,7	3,8	3,0	2,6	3,9	3,0	4,2	3,5

$\bar{Y} = 3,5275 \quad \to \mu$ $\qquad s^2 = 0,6528 \quad \to \sigma^2$

$H_0: Y \sim N(\mu = 3,5275;\ \sigma^2 = 0,6528)$
$H_1: Y \sim ?$

$\Leftrightarrow$

$H_0: (Y - 3,5275)/0,8080 = Z \sim N(0,1)$
$H_1: (Y - 3,5275)/0,8080 \sim ?$

Valores padronizados:

-1,64	0,71	-0,03	1,20	1,82	0,21	-0,65	-1,15	-0,16	-2,39
-0,53	-0,28	0,34	-0,53	1,45	0,21	-1,27	0,96	1,70	0,09
-0,78	-0,28	0,46	-0,53	1,57	-0,53	0,21	1,08	-0,41	0,71
-2,01	-0,16	1,45	0,34	-0,65	-1,15	0,46	-0,65	0,83	-0,03

OBS: se a distribuição a ser testada for a Normal, então há testes mais indicados, como o Shapiro-Wilk

Teste de Aderência / Teste de Normalidade

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

40/7 = 5,7 (> 5)

Valores padronizados:

-1,64	0,71	-0,03	1,20	1,82	0,21	-0,65	-1,15	-0,16	-2,39
-0,53	-0,28	0,34	-0,53	1,45	0,21	-1,27	0,[illegible]6	1,70	0,09
-0,78	-0,28	0,46	-0,53	1,57	-0,53	0,21	1,08	-0,41	0,71
-2,01	-0,16	1,45	0,34	-0,65	-1,15	0,[illegible]6	-0,65	0,83	-0,03

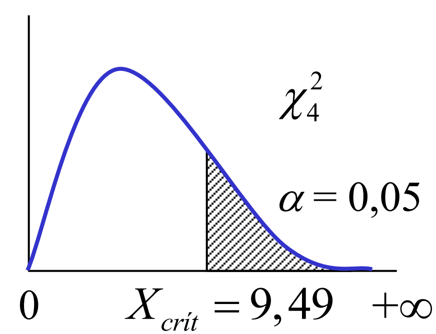
Agrupando-se os valores padronizados em 7 classes equiprováveis tem-se

Limites	FAObs	FAEsp
-∞ a -1,068	6	40/7
-1,068 a -0,566	4	40/7
-0,566 a -0,180	7	40/7
-0,180 a 0,180	5	40/7
0,180 a 0,566	7	40/7
0,566 a 1,068	4	40/7
1,068 a +∞	7	40/7

$7\text{-}1\text{-}2 = 4$

$$X = \sum_{i=1}^{7} \frac{\left(FAObs_i - FAEsp_i\right)^2}{FAEsp_i} \sim \chi^2_4$$

$$X = 2$$



Conclusão:

aceita-se H_0 a 5% sig., ou seja, $Y \sim N$

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

2,2	4,1	3,5	4,5	5,0	3,7	3,0	2,6	3,4	1,6
3,1	3,3	3,8	3,1	4,7	3,7	2,5	4,3	4,9	3,6
2,9	3,3	3,9	3,1	4,8	3,1	3,7	4,4	3,2	4,1
1,9	3,4	4,7	3,8	3,0	2,6	3,9	3,0	4,2	3,5

$\bar{Y} = 3{,}5275 \quad \to \mu$ $\qquad s^2 = 0{,}6528 \quad \to \sigma^2$

$$\begin{array}{l} H_0 : Y \sim N(\mu = 3{,}5275;\ \sigma^2 = 0{,}6528) \\ H_1 : Y \sim ? \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} H_0 : (Y - 3{,}5275)/0{,}8080 = Z \sim N(0,1) \\ H_1 : (Y - 3{,}5275)/0{,}8080 \sim ? \end{array}$$

Valores padronizados:

-1,64	0,71	-0,03	1,20	1,82	0,21	-0,65	-1,15	-0,16	-2,39
-0,53	-0,28	0,34	-0,53	1,45	0,21	-1,27	0,96	1,70	0,09
-0,78	-0,28	0,46	-0,53	1,57	-0,53	0,21	1,08	-0,41	0,71
-2,01	-0,16	1,45	0,34	-0,65	-1,15	0,46	-0,65	0,83	-0,03

OBS: se a distribuição a ser testada for a Normal, então há testes mais indicados, como o Shapiro-Wilk

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

$\boldsymbol{Z_i}$	$F_{esp}(Z_i)$
-2,39	0,0084
-2,01	0,0222
-1,64	0,0505
-1,27	0,1020
-1,15	0,1251
-1,15	0,1251
-0,78	0,2177
-0,65	0,2578
-0,65	0,2578
-0,65	0,2578
$\vdots$	$\vdots$
1,7	0,9554
1,82	0,9656

Se H_0 verdadeira

$$F_{esp}(Z_i) = P(Z < Z_i) \Rightarrow F_{esp}(Z < -1,64) = 0,0505$$

Ordenam-se os valores observados padronizados e calcula-se a frequência acumulada esperada para cada valor

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

Z_i	$F_{esp}(Z_i)$	$F_{obs}(Z_i)$
-2,39	0,0084	0,0250
-2,01	0,0222	0,0500
-1,64	0,0505	0,0750
-1,27	0,1020	0,1000
-1,15	0,1251	0,1250
-1,15	0,1251	0,1500
-0,78	0,2177	0,1750
-0,65	0,2578	0,2000
-0,65	0,2578	0,2250
-0,65	0,2578	0,2500
⋮	⋮	⋮
1,7	0,9554	0,9750
1,82	0,9656	1,0000

$$F_{esp}(Z_i) = P(Z < Z_i) \Rightarrow F_{esp}(Z < -1,64) = 0,0505$$

$$F_{obs}(Z_i) = FR(Z \le Z_i) = \frac{i}{n} \quad \Rightarrow F_{obs}(-1,64) = \frac{3}{40}$$

Em seguida, calcula-se a frequência acumulada observada para cada valor

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

Z_i	$F_{esp}(Z_i)$	$F_{obs}(Z_i)$	$F'_{obs}(Z_i)$
-2,39	0,0084	0,0250	0,0000
-2,01	0,0222	0,0500	0,0250
-1,64	0,0505	0,0750	0,0500
-1,27	0,1020	0,1000	0,0750
-1,15	0,1251	0,1250	0,1000
-1,15	0,1251	0,1500	0,1250
-0,78	0,2177	0,1750	0,1500
-0,65	0,2578	0,2000	0,1750
-0,65	0,2578	0,2250	0,2000
-0,65	0,2578	0,2500	0,2250
⋮	⋮	⋮	⋮
1,7	0,9554	0,9750	0,9500
1,82	0,9656	1,0000	0,9750

$$F_{esp}(Z_i) = P(Z < Z_i) \Rightarrow F_{esp}(Z < -1,64) = 0,0505$$

$$F_{obs}(Z_i) = FR(Z \leq Z_i) = \frac{i}{n} \quad \Rightarrow F_{obs}(-1,64) = \frac{3}{40}$$

$$F'_{obs}(Z_i) = FR(Z < Z_i) = \frac{i-1}{n} \quad \Rightarrow F'_{obs}(-1,64) = \frac{2}{40}$$

Para variáveis contínuas, há diferença em considerar ou não o valor observado para contabilizar a frequência acumulada observada ...

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

Z_i	$F_{esp}(Z_i)$	$F_{obs}(Z_i)$	$F'_{obs}(Z_i)$	Dif	Dif'
-2,39	0,0084	0,0250	0,0000	0,0166	0,0084
-2,01	0,0222	0,0500	0,0250	0,0278	0,0028
-1,64	0,0505	0,0750	0,0500	0,0245	0,0005
-1,27	0,1020	0,1000	0,0750	0,0020	0,0270
-1,15	0,1251	0,1250	0,1000	0,0001	0,0251
-1,15	0,1251	0,1500	0,1250	0,0249	0,0001
-0,78	0,2177	0,1750	0,1500	0,0427	0,0677
-0,65	0,2578	0,2000	0,1750	0,0578	0,0828
-0,65	0,2578	0,2250	0,2000	0,0328	0,0578
-0,65	0,2578	0,2500	0,2250	0,0078	0,0328
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,7	0,9554	0,9750	0,9500	0,0196	0,0054
1,82	0,9656	1,0000	0,9750	0,0344	0,0094

$$F_{esp}(Z_i) = P(Z < Z_i) \Rightarrow F_{esp}(Z < -1,64) = 0,0505$$

$$F_{obs}(Z_i) = FR(Z \le Z_i) = \frac{i}{n} \quad \Rightarrow F_{obs}(-1,64) = \frac{3}{40}$$

$$F'_{obs}(Z_i) = FR(Z < Z_i) = \frac{i-1}{n} \quad \Rightarrow F'_{obs}(-1,64) = \frac{2}{40}$$

$$D = máx\left|F_{obs}(Z_i) - F_{esp}(Z_i)\right|$$

deve ser comparado a um valor crítico (tabelado)

Se D for maior que $D_{crít}$, então rejeita-se H_0 e conclui-se que a distribuição teórica não é válida, com certo nível de significância.

Por fim, calcula-se a estatística D que corresponde a diferença máxima entre as frequências acumuladas esperadas e observadas

Valores Críticos do Teste KS

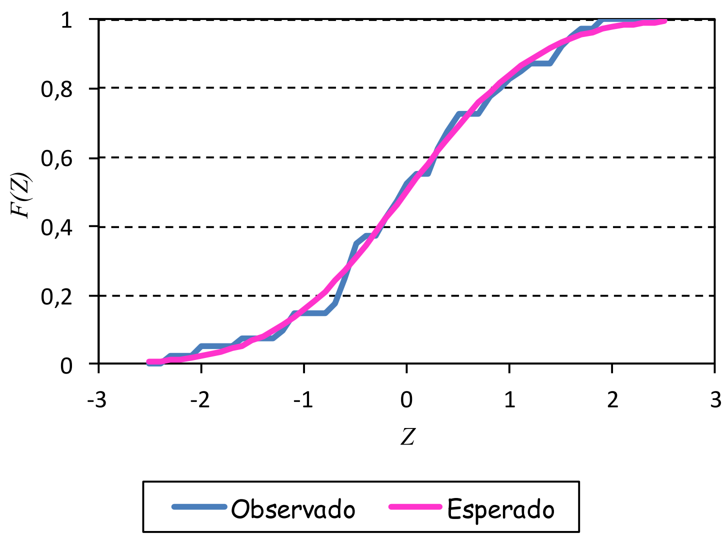
Tamanho da amostra (N)	Nível de significância para $D_{crít} = máx\left\|F_{obs}(X) - F_{esp}(X)\right\|$				
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,326	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,19	0,21	0,23	0,27
Mais de 35	$\frac{1,07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\boxed{\frac{1,36}{\sqrt{N}}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Exemplo: Considere os dados abaixo, resultantes da observação de 40 valores de uma variável aleatória qualquer Y. Deseja-se testar a hipótese de que esta variável aleatória tenha distribuição normal.

Valores padronizados ordenados:

-2,39	-2,01	-1,64	-1,27	-1,15	-1,15	-0,78	-0,65	-0,65	-0,65
-0,53	-0,53	-0,53	-0,53	-0,41	-0,28	-0,28	-0,16	-0,16	-0,03
-0,03	0,09	0,21	0,21	0,21	0,34	0,34	0,46	0,46	0,71
0,71	0,83	0,96	1,08	1,20	1,45	1,45	1,57	1,70	1,82



$$D = máx\left|F_{obs}(Z_i) - F_{esp}(Z_i)\right|$$

$$D = 0,0828 \qquad D_{crít} = 0,2150 \quad (\alpha = 5\%)$$

Conclusão: pode-se aceitar a hipótese de que os dados provenham de uma distribuição normal a 5% de significância.

Teste de Kolmogorov-Smirnov

OBSERVAÇÕES:

- É o teste mais apropriado para dados ordenados;
- Ideal quando a variável tem distribuição contínua; e
- Não há uma modificação quando se estima os parâmetros de uma distribuição (não há perdas de graus de liberdade como no teste χ^2).

No R:

```
dados <- c(2.2,4.1,3.5,4.5,5,3.7,3,2.6,3.4,1.6,3.1,3.3,3.8,3.1,4.7,3.7,2.5,4.3,4.9,3.6,2.9,3.3,3.9,3.1,4.8,3.1,
           3.7,4.4,3.2,4.1,1.9,3.4,4.7,3.8,3,2.6,3.9,3,4.2,3.5)
ks.test(dados, pnorm, mean(dados), sd(dados) )
```

- One-sample Kolmogorov-Smirnov test

- data: dados
- D = 0.08192, p-value = 0.9512
- alternative hypothesis: two-sided

Conclusão: pode-se aceitar a hipótese de que os dados provenham de uma distribuição normal a 5% de significância.

Alguns Testes Não Paramétricos

Uma amostra

Teste de Aderência

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Duas amostras relacionadas

Teste dos Sinais

Teste de Wilcoxon

Duas amostras independentes

Teste de Independência

Teste de Mann-Whitney

Teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras

Várias amostras relacionadas

Teste de Friedman

Várias amostras independentes

Teste de Kruskal-Wallis

Teste de Dunn

Medidas não-paramétricas de correlação

Coeficiente de contingência

Coeficiente de correlação de Spearman

Coeficiente de correlação de Kendall

Teste dos Sinais

Exemplo: Uma determinada técnica de processamento digital é conhecida por melhorar a interpretabilidade visual de imagens. A fim de comprovar sua eficiência, 20 imagens (de diferentes regiões e de usos e ocupação) foram processadas e apresentadas a um especialista que as classificou antes e depois deste processamento (em notas de 1 a 5), de forma totalmente independente, segundo a facilidade em distinguir os diferentes alvos presentes. Os resultados são apresentados abaixo (dados fictícios). Baseando-se nesses resultados, pode-se concluir que esta técnica realmente melhora a interpretabilidade das imagens?

Imagem	Antes	Depois	
1	4	5	+
2	3	5	+
3	2	2	0
4	4	3	-
5	3	4	+
6	1	2	+
7	5	4	-
8	3	4	+
9	1	3	+
10	5	5	0

Imagem	Antes	Depois	
11	2	3	+
12	3	2	-
13	3	4	+
14	3	4	+
15	3	5	+
16	1	3	+
17	4	4	0
18	2	4	+
19	4	5	+
20	2	3	+

Critérios:

Positivo: melhorou

Negativo: piorou

Nulo: indiferente

negativos: 3

positivos: 14

nulos: 3

Teste dos Sinais

Exemplo: Uma determinada técnica de processamento digital é conhecida por melhorar a interpretabilidade visual de imagens. A fim de comprovar sua eficiência, 20 imagens (de diferentes regiões e de usos e ocupação) foram processadas e apresentadas a um especialista que as classificou antes e depois deste processamento (em notas de 1 a 5), de forma totalmente independente, segundo a facilidade em distinguir os diferentes alvos presentes. Os resultados são apresentados abaixo (dados fictícios). Baseando-se nesses resultados, pode-se concluir que esta técnica realmente melhora a interpretabilidade das imagens?

$H_0 : p(+) = 0,5$ (a técnica não tem efeito sobre a interpretabilidade de imagens)

$H_1 : p(+) > 0,5$ (a técnica melhora a interpretabilidade de imagens)

Se X representa o número de resultados positivos nas n observações, então

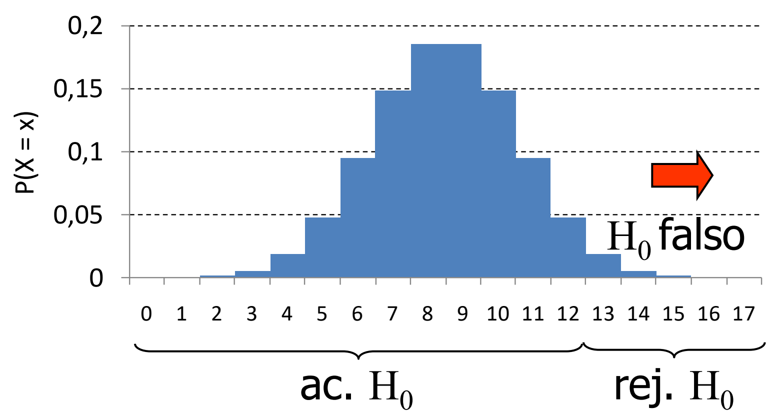
$X \sim$ Binomial $p = 0,5$ (se H_0 verdadeira) $n = 17$ (os empates são desconsiderados)

Teste dos Sinais

Exemplo: Uma determinada técnica de processamento digital é conhecida por melhorar a interpretabilidade visual de imagens. A fim de comprovar sua eficiência, 20 imagens (de diferentes regiões e de usos e ocupação) foram processadas e apresentadas a um especialista que as classificou antes e depois deste processamento (em notas de 1 a 5), de forma totalmente independente, segundo a facilidade em distinguir os diferentes alvos presentes. Os resultados são apresentados abaixo (dados fictícios). Baseando-se nesses resultados, pode-se concluir que esta técnica realmente melhora a interpretabilidade das imagens?

$H_0 : p(+) = 0{,}5$ (a técnica não tem efeito sobre a interpretabilidade de imagens)

$H_1 : p(+) > 0{,}5$ (a técnica melhora a interpretabilidade de imagens)



Adotando-se 5% de significância,

rejeita-se H_0 se forem observados 13 ou mais valores positivos, já que

$P(X \geq 12) = 7{,}2\%$ $P(X \geq 13) = 2{,}5\%$

positivos observados: 14

Conclusão: rejeito H_0 a 5%, ou seja, a técnica parece mesmo melhorar a interpretabilidade de imagens

Teste dos Sinais

OBSERVAÇÕES:

- É comum calcular-se o $valor\text{-}p = \text{mín}[\text{P}(X \leq x_{obs}); \text{P}(X \geq x_{obs})]$, que indica o quão raro é observar valores tão extremos quanto o observado
- Para grandes amostras ($n > 25$), a distribuição binomial aproxima-se da normal e então um teste z (com correção de continuidade) pode ser empregado
- Considera apenas o sentido da mudança e não sua grandeza
- É equivalente ao teste paramétrico t pareado (cujo poder é superior para amostras grandes e quando as condições prévias recomendadas são verdadeiras)

No R:

```
a<-c(4,3,2,4,3,1,5,3,1,5,2,3,3,3,3,1,4,2,4,2)
d<-c(5,5,2,3,4,2,4,4,3,5,3,2,4,4,5,3,4,4,5,3)
p<-sum(d-a > 0, na.rm = TRUE)
n<-length(a)- sum(d-a == 0, na.rm = TRUE)
binom.test(p, n)
```

- Exact binomial test
- data: 14 and 17
- number of successes = 14, number of trials = 17, p-value = 0.01273

Conclusão: rejeito H_0 a 5%, ou seja, a técnica parece mesmo melhorar a interpretabilidade de imagens

Teste de Wilcoxon

Exemplo (fictício): Para estimar a área plantada de uma cultura qualquer, um classificador automático pode utilizar uma ou mais imagens de uma mesma região. Espera-se que a utilização de imagens de duas datas resulte numa classificação melhor do que quando é utilizada apenas uma imagem, dependendo da época que estas imagens são obtidas. A fim de verificar se o classificador realmente melhora seu desempenho ao utilizar duas imagens ao invés de uma única imagem, 8 regiões foram selecionadas e a área de plantio corretamente classificada foi avaliada usando-se uma ou duas imagens. Os resultados são apresentados abaixo. O que se pode concluir?

Região	Área corretamente classificada		
	1 imagem	2 imagens	
1	70	117	+
2	51	48	-
3	60	63	+
4	57	90	+
5	43	41	-
6	15	21	+
7	25	36	+
8	103	122	+

Se a análise fosse feita usando-se o Teste dos Sinais:

$H_0 : p(+) = 0,5$

$H_1 : p(+) > 0,5$

Se H_0 verdadeira:

X ~ Binomial $p = 0,5 \quad n = 8$

Como o # positivos = 6 e H_0 verdadeira:

$Valor\text{-}P = P(X \geq 6) = 14,5\%$

Conclusão: aceita-se H_0

Teste de Wilcoxon

Exemplo (fictício): Para estimar a área plantada ... pode concluir?

Região	Área corretamente classificada		Dif
	1 imagem	2 imagens	
1	70	117	47
2	51	48	-3
3	60	63	3
4	57	90	33
5	43	41	-2
6	15	21	6
7	25	36	11
8	103	122	19

Procedimento:

a) Calculam-se as diferenças

Teste de Wilcoxon

Exemplo (fictício): Para estimar a área plantada ... pode concluir?

Região	Área corretamente classificada		Dif	Posto
	1 imagem	2 imagens		
1	70	117	47	8
2	51	48	-3	2,5
3	60	63	3	2,5
4	57	90	33	7
5	43	41	-2	1
6	15	21	6	4
7	25	36	11	5
8	103	122	19	6

Procedimento:

a) Calculam-se as diferenças

b) Obtém-se os postos das diferenças em módulo, desprezando-se as diferenças nulas. Para diferenças repetidas, são atribuídos postos médios

Teste de Wilcoxon

Exemplo (fictício): Para estimar a área plantada ... pode concluir?

Região	Área corretamente classificada		Dif	Posto
	1 imagem	2 imagens		
1	70	117	47	8
2	51	48	-3	-2,5
3	60	63	3	2,5
4	57	90	33	7
5	43	41	-2	-1
6	15	21	6	4
7	25	36	11	5
8	103	122	19	6

Procedimento:

a) Calculam-se as diferenças

b) Obtém-se os postos das diferenças em módulo, desprezando-se as diferenças nulas. Para diferenças repetidas, são atribuídos postos médios

c) Agregam-se os sinais das diferenças aos respectivos postos

Teste de Wilcoxon

Exemplo (fictício): Para estimar a área plantada ... pode concluir?

Região	Área corretamente classificada		Dif	Posto
	1 imagem	2 imagens		
1	70	117	47	8
2	51	48	-3	-2,5
3	60	63	3	2,5
4	57	90	33	7
5	43	41	-2	-1
6	15	21	6	4
7	25	36	11	5
8	103	122	19	6

$\boxed{T(-) = 3{,}5}$ $T(+) = 32{,}5$

Procedimento:

a) Calculam-se as diferenças

b) Obtém-se os postos das diferenças em módulo, desprezando-se as diferenças nulas. Para diferenças repetidas, são atribuídos postos médios

c) Agregam-se os sinais das diferenças aos respectivos postos

d) Calcula-se a menor soma dos postos de mesmo sinal

Teste de Wilcoxon

Exemplo (fictício): Para estimar a área plantada ... pode concluir?

Região	Área corretamente classificada		Dif	Posto
	1 imagem	2 imagens		
1	70	117	47	8
2	51	48	-3	-2,5
3	60	63	3	2,5
4	57	90	33	7
5	43	41	-2	-1
6	15	21	6	4
7	25	36	11	5
8	103	122	19	6

$T_{obs} = 3{,}5$

$H_0 : T(+) = T(-)$ Não há diferença no uso de 2 imagens

$H_1 : T(+) > T(-)$ A segunda imagem melhora a classificação

Procedimento:

a) Calculam-se as diferenças

b) Obtém-se os postos das diferenças em módulo, desprezando-se as diferenças nulas. Para diferenças repetidas, são atribuídos postos médios

c) Agregam-se os sinais das diferenças aos respectivos postos

d) Calcula-se a menor soma dos postos de mesmo sinal

e) Compara-se o valor obtido com o valor crítico (tabelado). Se valor observado for igual ou menor que o tabelado, rejeita-se H_0. Caso contrário, aceita-se H_0.

Valores Críticos do Teste de Wilcoxon

Tamanho da amostra (*N*)	Nível de significância (unilateral)			
	0,05	0,025	0,01	0,005
	Nível de significância (bilateral)			
	0,1	0,05	0,02	0,01
6	2	0	---	---
7	4	2	0	---
8	6	4	2	0
9	8	6	3	2
10	11	8	5	3
11	14	11	7	5
12	17	14	10	7
13	21	17	13	10
14	26	21	16	13
15	30	25	20	16
16	36	30	24	20
17	41	35	28	23
18	47	40	33	28
19	54	46	38	32
20	60	52	43	38
21	68	59	49	43
22	75	66	56	49
23	83	73	62	55
24	92	81	69	61
25	101	89	77	68

Teste de Wilcoxon

Exemplo (fictício): Para estimar a área plantada ... pode concluir?

Região	Área corretamente classificada		Dif	Posto
	1 imagem	2 imagens		
1	70	117	47	8
2	51	48	-3	-2,5
3	60	63	3	2,5
4	57	90	33	7
5	43	41	-2	-1
6	15	21	6	4
7	25	36	11	5
8	103	122	19	6

Procedimento:

a) Calculam-se as diferenças

b) Obtém-se os postos das diferenças em módulo, desprezando-se as diferenças nulas. Para diferenças repetidas, são atribuídos postos médios

c) Agregam-se os sinais das diferenças aos respectivos postos

d) Calcula-se a menor soma dos postos de mesmo sinal

e) Compara-se o valor obtido com o valor crítico (tabelado). Se valor observado for igual ou menor que o tabelado, rejeita-se H_0. Caso contrário, aceita-se H_0.

$T_{obs} = 3{,}5$

$H_0 : T(+) = T(-)$ Não há diferença no uso de 2 imagens

$H_1 : T(+) > T(-)$ A segunda imagem melhora a classificação

$T_{crít\ 5\%} = 6$ Conclusão: rejeita-se H_0, ou seja, a inclusão de uma nova imagem melhora o desempenho do classificador a 5% de significância

Teste de Wilcoxon

OBSERVAÇÕES:

- Este teste é mais poderoso que o Teste dos Sinais, pois permite atribuir maior peso aos pares com maiores diferenças (o Teste dos Sinais considera apenas o sentido da mudança)
- É equivalente ao teste paramétrico t pareado
- Para grandes amostras ($n > 25$), a estatística T pode ser aproximada para uma normal.

Nesse caso, utiliza-se a estatística:

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{T - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}$$

No R:

```
i1<-c(70,51,60,57,43,15,25,103)
i2<-c(117,48,63,90,41,21,36,122)
wilcox.test(i1, i2, paired = TRUE, exact = FALSE,
alternative = "less")
```

- Wilcoxon signed rank test with continuity correction
- data: i1 and i2
- V = 3.5, p-value = 0.02483
- alternative hypothesis: true location shift is less than 0

Conclusão: rejeita-se H_0, ou seja, a inclusão de uma nova imagem melhora o desempenho do classificador a 5% de significância

Alguns Testes Não Paramétricos

Uma amostra

Teste de Aderência

Teste de Kolmogorov-Smirnov

Duas amostras relacionadas

Teste dos Sinais

Teste de Wilcoxon

Duas amostras independentes

Teste de Independência

Teste de Mann-Whitney

Teste de Kolmogorov-Smirnov para duas amostras

Várias amostras relacionadas

Teste de Friedman

Várias amostras independentes

Teste de Kruskal-Wallis

Teste de Dunn

Medidas não-paramétricas de correlação

Coeficiente de contingência

Coeficiente de correlação de Spearman

Coeficiente de correlação de Kendall

Teste de Independência

Exemplo (fictício): Algumas espécies de pássaro ocupam diferentes ambientes dentro da floresta. A fim de comprovar se algumas espécies de uma família de pássaros têm esta característica, durante um ano, um pesquisador identificou e contou os pássaros capturados em 3 diferentes ambientes da floresta. Os resultados encontram-se na tabela a seguir. O que se pode concluir? Podemos afirmar que algumas espécies desta família se distribuem preferencialmente em algum ambiente?

Espécie	Ambiente			Total
	Interior	Borda	Clareira	
I	5	2	21	28
II	1	5	3	9
III	34	2	3	39
IV	26	3	1	30
Total	66	12	28	106

$p_i =$ probabilidade de encontrar a espécie i em qualquer ambiente
$p_j =$ probabilidade de encontrar qualquer espécie no ambiente j

$H_0 : p_{ij} = p_i * p_j$ as espécies não têm preferência por um ambiente específico
$H_1 : p_{ij} \neq p_i * p_j$ as espécies ocupam preferencialmente um determinado ambiente

Teste de Independência

Exemplo (fictício): Algumas espécies de pássaro ... em algum ambiente?

Observado

Espécie	Ambiente			Total
	Interior	Borda	Clareira	
I	5	2	21	28
II	1	5	3	9
III	34	2	3	39
IV	26	3	1	30
Total	66	12	28	106

$$H_0 : p_{ij} = p_i * p_j$$
$$H_1 : p_{ij} \neq p_i * p_j$$

Se H_0 é verdadeira, então

Esperado

Espécie	Ambiente			Total
	Interior	Borda	Clareira	
I	?			28
II				9
III				39
IV				30
Total	66	12	28	106

$$\underbrace{\frac{28}{106}}_{\hat{p}_i} * \underbrace{\frac{66}{106}}_{\hat{p}_j} * 106 = \frac{28 * 66}{106}$$

Teste de Independência

Exemplo (fictício): Algumas espécies de pássaro ... em algum ambiente?

Observado

Espécie	Ambiente			Total
	Interior	Borda	Clareira	
I	5	2	21	28
II	1	5	3	9
III	34	2	3	39
IV	26	3	1	30
Total	66	12	28	106

Se H_0 é verdadeira, então

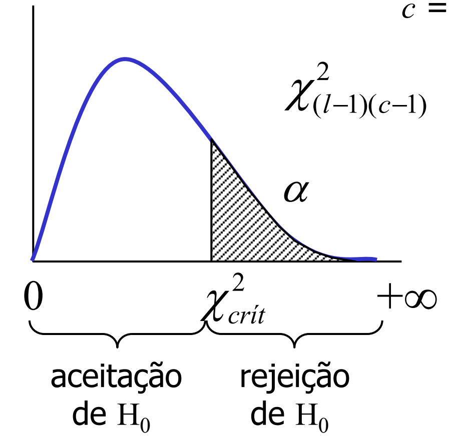
Esperado

Espécie	Ambiente			Total
	Interior	Borda	Clareira	
I	17,43	3,17	7,40	28
II	5,60	1,02	2,38	9
III	24,28	4,42	10,30	39
IV	18,68	3,40	7,92	30
Total	66	12	28	106

$\mathrm{H}_0 : p_{ij} = p_i * p_j$
$\mathrm{H}_1 : p_{ij} \neq p_i * p_j$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(FAObs_{ij} - FAEsp_{ij}\right)^2}{FAEsp_{ij}} \sim \chi^2_{(l-1)(c-1)}$$

l = nº linhas
c = nº colunas



Teste de Independência

Exemplo (fictício): Algumas espécies de pássaro ... em algum ambiente?

Observado

Espécie	Ambiente			Total
	Interior	Borda	Clareira	
I	5	2	21	28
II	1	5	3	9
III	34	2	3	39
IV	26	3	1	30
Total	66	12	28	106

$\mathrm{H}_0 : p_{ij} = p_i * p_j$

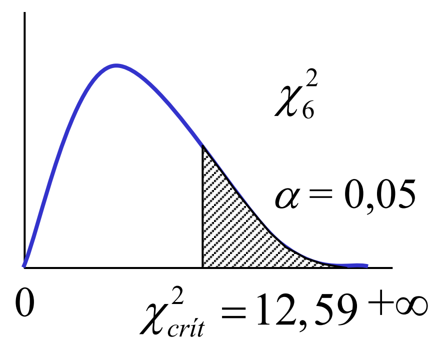
$\mathrm{H}_1 : p_{ij} \neq p_i * p_j$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(FAObs_{ij} - FAEsp_{ij}\right)^2}{FAEsp_{ij}} \sim \chi^2_{(l-1)(c-1)}$$

Se H_0 é verdadeira, então

Esperado

Espécie	Ambiente			Total
	Interior	Borda	Clareira	
I	17,43	3,17	7,40	28
II	5,60	1,02	2,38	9
III	24,28	4,42	10,30	39
IV	18,68	3,40	7,92	30
Total	66	12	28	106



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \frac{\left(FAObs_{ij} - FAEsp_{ij}\right)^2}{FAEsp_{ij}} = 73{,}17$$

Conclusão:

rejeita-se H_0 a 5%, ou seja, as espécies não ocupam a floresta independentemente do ambiente (há uma preferência de cada espécie)

Teste de Independência

OBSERVAÇÕES:

- Para $l = c = 2$, ou seja, para tabelas de contingência 2x2, usa-se a estatística

A	B	A+B
C	D	C+D
A+C	B+D	N

$$\frac{N\left(\left|AD - BC\right| - \dfrac{N}{2}\right)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} \sim \chi_1^2$$

onde $N = A + B + C + D$;

- Só pode ser aplicado quando no máximo 20% dos valores esperados sejam menores que 5 e nenhum seja inferior a 1; e
- Este teste não é sensível ao ordenamento das classes.

No R:

```
tab<-as.table(matrix(c(5,1,34,26,2,5,2,3,21,3,3,1),ncol=3,nrow=4))
colnames(tab)<-c('Interior','Borda','Clareira')
rownames(tab)<-c('I','II','III','IV')
chisq.test(tab)
```

- Pearson's Chi-squared test
- data: tab
- X-squared = 73.173, df = 6, p-value = 9.12e-14

Conclusão: rejeita-se H_0 a 5%, ou seja, as espécies não ocupam a floresta independentemente do ambiente (há uma preferência de cada espécie)

Teste de Mann-Withney

Exemplo (fictício): As plantas possuem diferentes mecanismos de dispersão de sementes de modo que, para algumas espécies, há a formação de agrupamentos enquanto que, para outras, há uma tendência de maior dispersão. A fim de avaliar a comportamento de duas espécies quaisquer, selecionou-se aleatoriamente algumas plântulas recém-germinadas e anotou-se a distância mínima que esta plântula estava de um indivíduo adulto da mesma espécie. Os resultados são apresentados abaixo. O que se pode concluir?

Distância (m)	
Espécie A	Espécie B
45,7	6,3
67,1	2,1
5,3	1,5
132,1	12,0
153,0	3,2
289,7	5,1
12,8	5,0
156,2	6,7
223,2	9,8
54,0	11,3
19,1	
10,8	

Será que estes resultados poderiam ser obtidos mesmo que ambas espécies tivessem o mesmo comportamento de dispersão ou será que eles evidenciam a diferença entre estas espécies?

Teste de Mann-Withney

Exemplo (fictício): As plantas possuem ... pode concluir?

Espécie A	Posto	Espécie B	Posto
45,7	15	6,3	7
67,1	17	2,1	2
5,3	6	1,5	1
132,1	18	12,0	12
153,0	19	3,2	3
289,7	22	5,1	5
12,8	13	5,0	4
156,2	20	6,7	8
223,2	21	9,8	9
54,0	16	11,3	11
19,1	14		
10,8	10		

Procedimento:

a) Obtém-se o posto de cada observação, independentemente do grupo a qual pertença

Teste de Mann-Withney

Exemplo (fictício): As plantas possuem ... pode concluir?

Espécie A	Posto	Espécie B	Posto
45,7	15	6,3	7
67,1	17	2,1	2
5,3	6	1,5	1
132,1	18	12,0	12
153,0	19	3,2	3
289,7	22	5,1	5
12,8	13	5,0	4
156,2	20	6,7	8
223,2	21	9,8	9
54,0	16	11,3	11
19,1	14		
10,8	10		

$R_2 = 191$ $R_1 = 62$

Procedimento:

a) Obtém-se o posto de cada observação, independentemente do grupo a qual pertença
b) Soma-se os postos de cada grupo, obtendo-se R_1 (associado à menor amostra, n_1) e R_2 (associado à maior amostra, n_2)

Teste de Mann-Withney

Exemplo (fictício): As plantas possuem ... pode concluir?

Espécie A	Posto	Espécie B	Posto
45,7	15	6,3	7
67,1	17	2,1	2
5,3	6	1,5	1
132,1	18	12,0	12
153,0	19	3,2	3
289,7	22	5,1	5
12,8	13	5,0	4
156,2	20	6,7	8
223,2	21	9,8	9
54,0	16	11,3	11
19,1	14		
10,8	10		

$R_2 = 191$ $R_1 = 62$

Procedimento:

a) Obtém-se o posto de cada observação, independentemente do grupo a qual pertença

b) Soma-se os postos de cada grupo, obtendo-se R_1 (associado à menor amostra, n_1) e R_2 (associado à maior amostra, n_2)

c) Calcula-se a estatística W

$$W_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = 10.12 + \frac{10.11}{2} - 62 = 113$$

$$W_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = 10.12 + \frac{12.13}{2} - 191 = 7$$

$$W = mín(W_1, W_2)$$

$\boxed{W = 7}$

W representa o número de vezes que um posto no grupo A precede um posto do grupo B

B B B B B A B B B A B B A A A A A A A A A A

1
1
1
2
2

7

Teste de Mann-Withney

Exemplo (fictício): As plantas possuem ... pode concluir?

Espécie A	Posto	Espécie B	Posto
45,7	15	6,3	7
67,1	17	2,1	2
5,3	6	1,5	1
132,1	18	12,0	12
153,0	19	3,2	3
289,7	22	5,1	5
12,8	13	5,0	4
156,2	20	6,7	8
223,2	21	9,8	9
54,0	16	11,3	11
19,1	14		
10,8	10		

$R_2 = 191$ $\qquad$ $R_1 = 62$

H_0 : Não há diferença no comportamento das 2 espécies

H_1: A espécie A dispersa-se mais do que a espécie B (unilateral)

Procedimento:

a) Obtém-se o posto de cada observação, independentemente do grupo a qual pertença

b) Soma-se os postos de cada grupo, obtendo-se R_1 (associado à menor amostra, n_1) e R_2 (associado à maior amostra, n_2)

c) Calcula-se a estatística W

$$W_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = 10.12 + \frac{10.11}{2} - 62 = 113$$

$$W_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = 10.12 + \frac{12.13}{2} - 191 = 7$$

$$W = mín(W_1, W_2)$$

d) Compara-se o valor obtido com o valor crítico (tabelado). Se valor observado for igual ou menor que o tabelado, rejeita-se H_0. Caso contrário, aceita-se H_0.

Valores Críticos do Teste de Mann-Withney

	Teste Bilateral ($\alpha = 1\%$)																	
	n_1																	
n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	–	–	–	–	–	–	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3
4	–	–	–	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
5	–	–	0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13
6	–	0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	15	16	17	18
7	–	0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
8	–	1	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	28	30
9	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	20	22	24	27	29	31	33	36
10	0	2	4	6	9	11	13	16	18	21	24	26	29	31	34	37	39	42
11	0	2	5	7	10	13	16	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
12	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	31	34	37	41	44	47	51	54
13	1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34	38	42	45	49	53	56	60
14	1	4	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	63	67
15	2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51	55	60	64	69	73
16	2	5	9	13	18	22	27	31	36	41	45	50	55	60	65	70	74	79
17	2	6	10	15	19	24	29	34	39	44	49	54	60	65	70	75	81	86
18	2	6	11	16	21	26	31	37	42	47	53	58	64	70	75	81	87	92
19	3	7	12	17	22	28	33	39	45	51	56	63	69	74	81	87	93	99
20	3	8	13	18	24	30	36	42	48	54	60	67	73	79	86	92	99	105

Valores Críticos do Teste de Mann-Withney

Teste Bilateral ($\alpha = 5\%$)

n_2 \ n_1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	–	–	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	–	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
5	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

Valores Críticos do Teste de Mann-Withney

Teste Unilateral ($\alpha = 1\%$)																		
	n_1																	
n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	–	–	–	–	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5
4	–	–	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10
5	–	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	–	1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22
7	0	1	3	4	6	7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28
8	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34
9	1	3	5	7	9	11	14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40
10	1	3	6	8	11	13	16	19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47
11	1	4	7	9	12	15	18	22	25	28	31	34	37	41	44	47	50	53
12	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60
13	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
14	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47	51	56	60	65	69	73
15	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	66	70	75	80
16	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	82	87
17	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93
18	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88	94	100
19	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	107
20	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

Valores Críticos do Teste de Mann-Withney

	Teste Unilateral ($\alpha = 5\%$)																	
	n_1																	
n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	0	0	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

Teste de Mann-Withney

Exemplo (fictício): As plantas possuem ... pode concluir?

Espécie A	Posto	Espécie B	Posto
45,7	15	6,3	7
67,1	17	2,1	2
5,3	6	1,5	1
132,1	18	12,0	12
153,0	19	3,2	3
289,7	22	5,1	5
12,8	13	5,0	4
156,2	20	6,7	8
223,2	21	9,8	9
54,0	16	11,3	11
19,1	14		
10,8	10		

$R_2 = 191$ $\qquad$ $R_1 = 62$

H_0 : Não há diferença no comportamento das 2 espécies

H_1: A espécie A dispersa-se mais do que a espécie B (unilateral)

Procedimento:

a) Obtém-se o posto de cada observação, independentemente do grupo a qual pertença

b) Soma-se os postos de cada grupo, obtendo-se R_1 (associado à menor amostra, n_1) e R_2 (associado à maior amostra, n_2)

c) Calcula-se a estatística W

$$W_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 = 10.12 + \frac{10.11}{2} - 62 = 113$$

$$W_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2 = 10.12 + \frac{12.13}{2} - 191 = 7$$

$$W = mín(W_1, W_2)$$

d) Compara-se o valor obtido com o valor crítico (tabelado). Se valor observado for igual ou menor que o tabelado, rejeita-se H_0. Caso contrário, aceita-se H_0.

$\boxed{W_{obs} = 7}$ $\qquad$ $W_{crít\ 5\%} = 34$

Conclusão: rejeita-se H_0, ou seja, a espécie A parece dispersar-se mais do que a espécie B, adotando-se 5% de significância

Teste de Mann-Withney

OBSERVAÇÕES:

- É um dos testes não paramétricos mais poderosos, sendo uma alternativa muito útil ao teste t
- Para grandes amostras ($n_2 > 20$), a estatística W pode ser aproximada para uma normal. Nesse caso, utiliza-se a estatística z:

$$z = \frac{W - \mu_W}{\sigma_W} = \frac{W - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

- Quando ocorrem empates dentro do mesmo grupo, o valor W não é afetado. No entanto, quando o empate ocorre entre grupos diferentes, uma correção em σ_W é necessária:

$$\sigma_W = \sqrt{\left(\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}\right)\left(\frac{N^3 - N}{12} - T\right)}$$

onde:

$$T = \sum_{i=1}^{n_T} \left(\frac{t_i^3 - t_i}{12}\right)$$

$N = n_1 + n_2$

t_i é o número de observações do posto empatado i

n_T é o número postos empatados

Teste de Mann-Withney

No R:

```
amostra1<-c(45.7,67.1,5.3,132.1,153,289.7,12.8,156.2,223.2,54,19.1,10.8)
amostra2<-c(6.3,2.1,1.5,12,3.2,5.1,5,6.7,9.8,11.3)
wilcox.test(amostra1,amostra2)
```

- Wilcoxon rank sum exact test
- data: amostra1 and amostra2
- W = 113, p-value = 0.0001392
- alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0

observe que no R, a estatística corresponde ao valor máximo

Distância (m)	
Espécie A	Espécie B
45,7	6,3
67,1	2,1
5,3	1,5
132,1	12,0
153,0	3,2
289,7	5,1
12,8	5,0
156,2	6,7
223,2	9,8
54,0	11,3
19,1	
10,8	

Conclusão: rejeita-se H_0, ou seja, a espécie A parece dispersar-se mais do que a espécie B, adotando-se 5% de significância

Teste de Kolmogorov-Smirnov (2 amostras)

Exemplo: Um pesquisador deseja saber se duas regiões de uma mesma imagem apresentam a mesma distribuição de valores (desconhecida). Para testar esta hipótese, amostrou-se 15 pontos independentes de cada região. Os valores observados são apresentados na tabela abaixo. O que se conclui a partir destes valores?

Região A	Região B
81	56
78	55
61	76
89	54
69	83
58	97
64	85
84	66
89	78
83	80
88	61
56	69
87	71
95	55
75	91

OBS: Apesar de $n_A = n_B = n$, os valores são independentes entre si (não são dados pareados)

Teste de Kolmogorov-Smirnov (2 amostras)

Exemplo: Um pesquisador deseja saber se duas regiões de uma mesma imagem apresentam a mesma distribuição de valores (desconhecida). Para testar esta hipótese, amostrou-se 15 pontos independentes de cada região. Os valores observados são apresentados na tabela abaixo. O que se conclui a partir destes valores?

Região A	Região B
81	56
78	55
61	76
89	54
69	83
58	97
64	85
84	66
89	78
83	80
88	61
56	69
87	71
95	55
75	91

Valor	FRA_A	FRA_B
54	0	1/15
55	0	3/15
56	1/15	4/15
58	2/15	4/15
61	3/15	5/15
64	4/15	5/15
66	4/15	6/15
69	5/15	7/15
71	5/15	8/15
75	6/15	8/15
76	6/15	9/15
78	7/15	10/15
80	7/15	11/15
81	8/15	11/15
83	9/15	12/15
84	10/15	12/15
85	10/15	13/15
87	11/15	13/15
88	12/15	13/15
89	14/15	13/15
91	14/15	14/15
95	15/15	14/15
97	15/15	15/15

Procedimento:

a) Organiza-se uma lista ordenada com todos os valores de ambas regiões (valores repetidos aparecem apenas uma vez)
b) Calcula-se a Frequência Relativa Acumulada de cada valor para cada região

Teste de Kolmogorov-Smirnov (2 amostras)

Exemplo: Um pesquisador deseja saber se duas regiões de uma mesma imagem apresentam a mesma distribuição de valores (desconhecida). Para testar esta hipótese, amostrou-se 15 pontos independentes de cada região. Os valores observados são apresentados na tabela abaixo. O que se conclui a partir destes valores?

Valor	FRA_A	FRA_B	$\|Dif\|$
54	0	1/15	1/15
55	0	3/15	3/15
56	1/15	4/15	3/15
58	2/15	4/15	2/15
61	3/15	5/15	2/15
64	4/15	5/15	1/15
66	4/15	6/15	2/15
69	5/15	7/15	2/15
71	5/15	8/15	3/15
75	6/15	8/15	2/15
76	6/15	9/15	3/15
78	7/15	10/15	3/15
80	7/15	11/15	4/15
81	8/15	11/15	3/15
83	9/15	12/15	3/15
84	10/15	12/15	2/15
85	10/15	13/15	3/15
87	11/15	13/15	2/15
88	12/15	13/15	1/15
89	14/15	13/15	1/15
91	14/15	14/15	0
95	15/15	14/15	1/15
97	15/15	15/15	0

$$D_{obs} = 4/15$$

$$KD_{obs} = 4$$

H_0 : As duas amostras provêem da mesma população

H_1: As duas amostras provêem de populações diferentes (bilateral)

Procedimento:

a) Organiza-se uma lista ordenada com todos os valores de ambas regiões (valores repetidos aparecem apenas uma vez)

b) Calcula-se a Frequência Relativa Acumulada de cada valor para cada região

c) Calcula-se a diferença, em módulo, das Frequências Relativas Acumuladas de cada valor

d) Identifica-se a maior diferença relativa (D_{obs}) e/ou o seu numerador (KD_{obs}), considerando que o denominador é igual a n ($= n_A = n_B$).

e) Compara-se o valor obtido com o valor crítico (tabelado). Se valor observado for igual ou maior que o tabelado, rejeita-se H_0. Caso contrário, aceita-se H_0.

Valores Críticos de KD para o Teste KS (2 amostras)

n $(n_1 = n_2)$	Unilateral $\alpha = 0{,}05$	Unilateral $\alpha = 0{,}01$	Bilateral $\alpha = 0{,}05$	Bilateral $\alpha = 0{,}01$
3	3	-	-	-
4	4	-	4	-
5	4	5	5	5
6	5	6	5	6
7	5	6	6	6
8	5	6	6	7
9	6	7	6	7
10	6	7	7	8
11	6	8	7	8
12	6	8	7	8
13	7	8	7	9
14	7	8	8	9
15	7	9	8	9
16	7	9	8	10
17	8	9	8	10

n $(n_1 = n_2)$	Unilateral $\alpha = 0{,}05$	Unilateral $\alpha = 0{,}01$	Bilateral $\alpha = 0{,}05$	Bilateral $\alpha = 0{,}01$
18	8	10	9	10
19	8	10	9	10
20	8	10	9	11
21	8	10	9	11
22	9	11	9	11
23	9	11	10	11
24	9	11	10	12
25	9	11	10	12
26	9	11	10	12
27	9	12	10	12
28	10	12	11	13
29	10	12	11	13
30	10	12	11	13
35	11	13	12	14
40	11	14	13	15

$n > 40$ Unilateral	$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$
	$1{,}63\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$	$1{,}52\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$	$1{,}36\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$	$1{,}22\sqrt{\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$

Teste de Kolmogorov-Smirnov (2 amostras)

Exemplo: Um pesquisador deseja saber se duas regiões de uma mesma imagem apresentam a mesma distribuição de valores (desconhecida). Para testar esta hipótese, amostrou-se 15 pontos independentes de cada região. Os valores observados são apresentados na tabela abaixo. O que se conclui a partir destes valores?

Valor	FRA_A	FRA_B	$\lvert Dif \rvert$
54	0	1/15	1/15
55	0	3/15	3/15
56	1/15	4/15	3/15
58	2/15	4/15	2/15
61	3/15	5/15	2/15
64	4/15	5/15	1/15
66	4/15	6/15	2/15
69	5/15	7/15	2/15
71	5/15	8/15	3/15
75	6/15	8/15	2/15
76	6/15	9/15	3/15
78	7/15	10/15	3/15
80	7/15	11/15	$\boxed{4/15}$
81	8/15	11/15	3/15
83	9/15	12/15	3/15
84	10/15	12/15	2/15
85	10/15	13/15	3/15
87	11/15	13/15	2/15
88	12/15	13/15	1/15
89	14/15	13/15	1/15
91	14/15	14/15	0
95	15/15	14/15	1/15
97	15/15	15/15	0

$$D_{obs} = 4/15$$

$$KD_{obs} = 4$$

H_0 : As duas amostras provêem da mesma população

H_1: As duas amostras provêem de populações diferentes (bilateral)

$$KD_{crít\ 5\%} = 8$$

Conclusão: aceita-se H_0, ou seja, as duas amostras proveem da mesma população, adotando-se 5% de significância

As duas amostras poderiam ser agrupadas para compor uma única amostra com 30 valores!

Procedimento:

a) Organiza-se uma lista ordenada com todos os valores de ambas regiões (valores repetidos aparecem apenas uma vez)

b) Calcula-se a Freqüência Relativa Acumulada de cada valor para cada região

c) Calcula-se a diferença, em módulo, das Freqüências Relativas Acumuladas de cada valor

d) Identificar a maior diferença relativa (D_{obs}) e/ou o seu numerador (KD_{obs}), considerando que o denominador é igual a n ($= n_A = n_B$).

e) Compara-se o valor obtido com o valor crítico (tabelado). Se valor observado for igual ou maior que o tabelado, rejeita-se H_0. Caso contrário, aceita-se H_0.

Teste de Kolmogorov-Smirnov (2 amostras)

OBSERVAÇÕES:

- para amostras pequenas com $n_1 \neq n_2$, deve-se buscar tabelas específicas para encontrar os valores críticos (http://www.jstor.org/stable/2285616)
- para amostras grandes, pode-se definir um número arbitrário de intervalos para os quais serão calculadas as frequências relativas acumuladas de cada grupo (utilizar tantos intervalos quanto possível)

No R:

```
amostra1 <- c(81,78,61,89,69,58,64,84,89,83,88,56,87,95,75)
amostra2 <- c(56,55,76,54,83,97,85,66,78,80,61,69,71,55,91)
ks.test(amostra1,amostra2)
```

- Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

- data: amostra1 and amostra2
- D = 0.26667, p-value = 0.6604
- alternative hypothesis: two-sided

Conclusão: aceita-se H_0, ou seja, as duas amostras proveem da mesma população, adotando-se 5% de significância