Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204

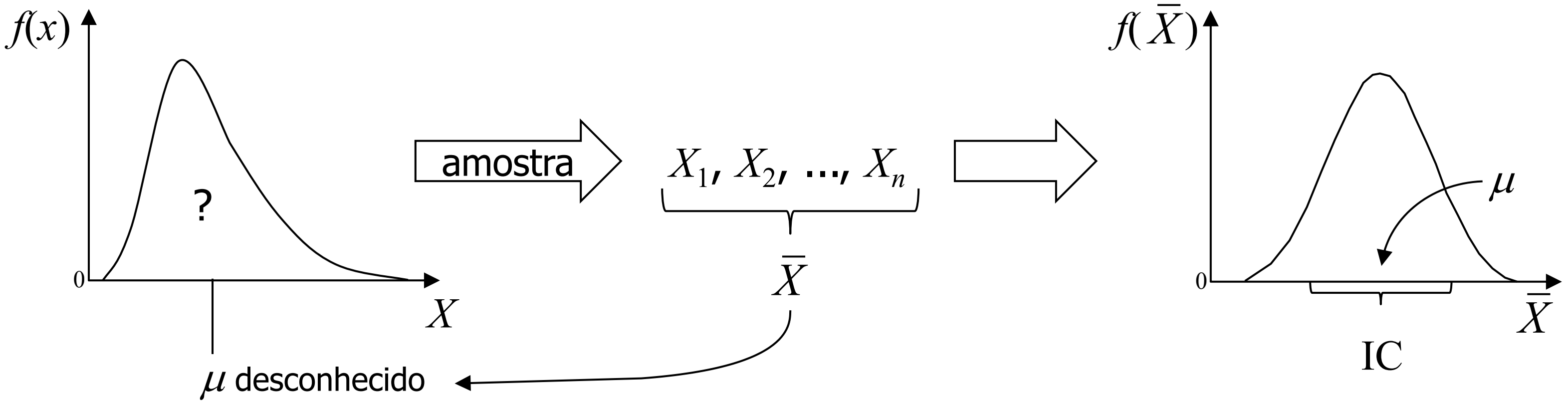
Teste de Hipótese

Camilo Daleles Rennó
camilo.renno@inpe.br
acesso do conteúdo do curso em Bibdigital do INPE ou GitHub

Estimação de Parâmetros

Como já foi visto, um parâmetro pode ser estimado através de um único valor (estimador pontual) ou a partir de um intervalo de confiança

Por exemplo:



Isso é particularmente útil quando não se conhece nada a respeito do parâmetro e/ou da distribuição estudada.

Mas se já houvesse uma ideia de qual deveria ser o valor deste parâmetro desconhecido, haveria algum procedimento para comprovar ou refutar esta suposição?

$\Rightarrow$ **Teste de Hipótese**

Teste de Hipótese para μ

Uma amostra de 25 valores foi selecionada, chegando a uma média amostral $\bar{X}$ igual a 11,3. Poderia esta média amostral ter sido obtida de uma população com média $\mu = 10$?

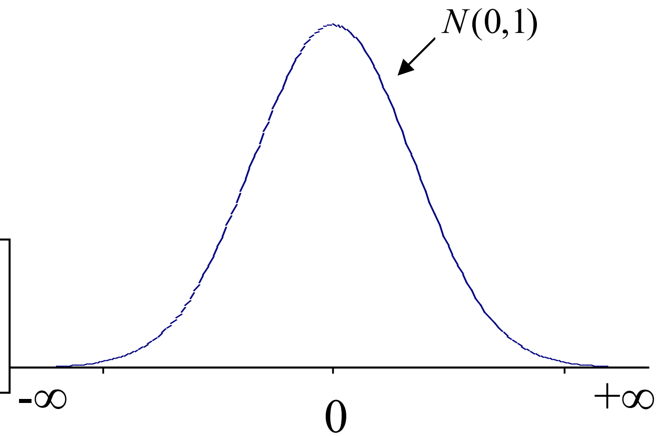
Hipóteses

$H_0 : \mu = 10$ (hipótese nula)

$H_1 : \mu \neq 10$ (hipótese alternativa)

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

definição de uma estatística que relaciona o parâmetro ao seu estimador (deve válida sob qualquer hipótese)



Quais as pressuposições?

Não há nenhuma pressuposição para que essa estatística seja usada!

No entanto, a variância populacional σ^2 deve ser conhecida

Teste de Hipótese para μ

Uma amostra de 25 valores foi selecionada, chegando a uma média amostral $\bar{X}$ igual a 11,3. Poderia esta média amostral ter sido obtida de uma população com média $\mu = 10$?

Hipóteses

$H_0 : \mu = 10$ (hipótese nula)

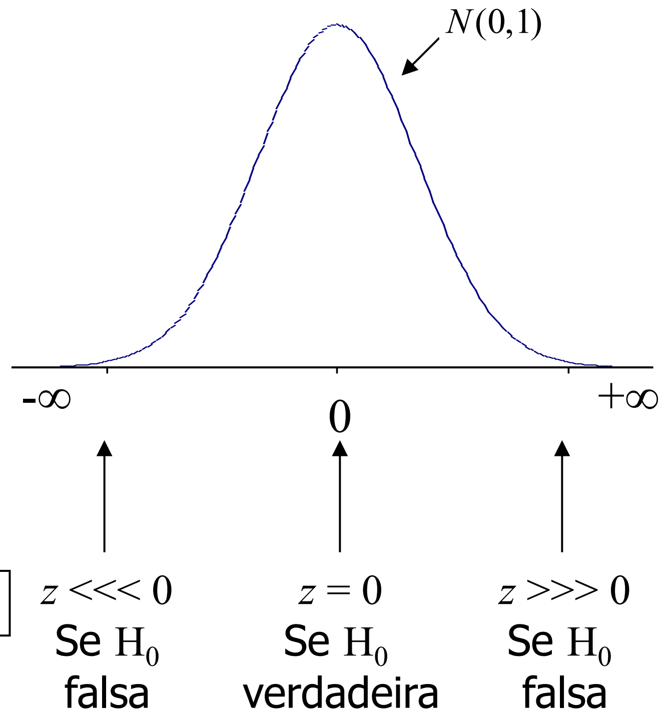
$H_1 : \mu \neq 10$ (hipótese alternativa)

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

(válida somente se H_0 for verdadeira)



Quais os valores desta estatística indicariam que H_0 seria verdadeira?

E quais os valores desta estatística indicariam que H_0 seria falsa?

Teste de Hipótese para μ

Uma amostra de 25 valores foi selecionada, chegando a uma média amostral $\bar{X}$ igual a 11,3. Poderia esta média amostral ter sido obtida de uma população com média $\mu = 10$?

Hipóteses

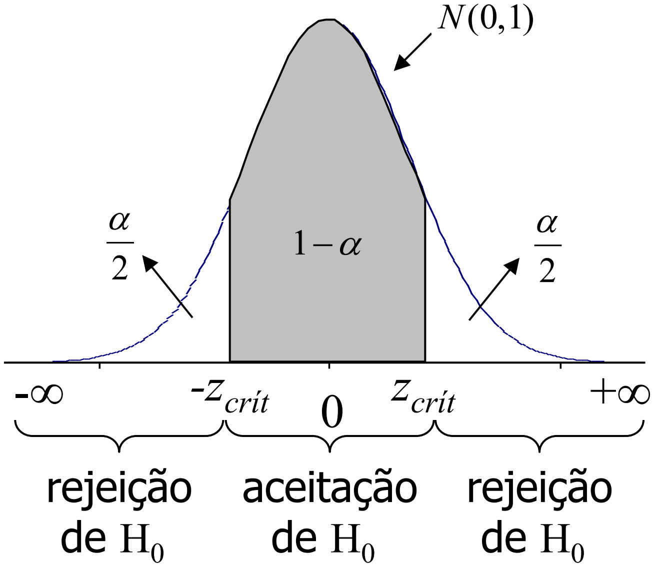
$H_0 : \mu = 10$ (hipótese nula)

$H_1 : \mu \neq 10$ (hipótese alternativa)

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $-z_{crít} < z < z_{crít}$ $\rightarrow P(-z_{crít} < z < z_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário $\rightarrow P(|z| > z_{crít}) = \alpha$

Conclusão (sempre associada a um nível de significância α)

Teste de Hipótese para μ

Uma amostra de 25 valores foi selecionada, chegando a uma média amostral $\bar{X}$ igual a 11,3. Poderia esta média amostral ter sido obtida de uma população com média $\mu = 10$? Por simplificação, consideremos que $\sigma^2 = 16$. Adote $\alpha = 5\%$.

Hipóteses

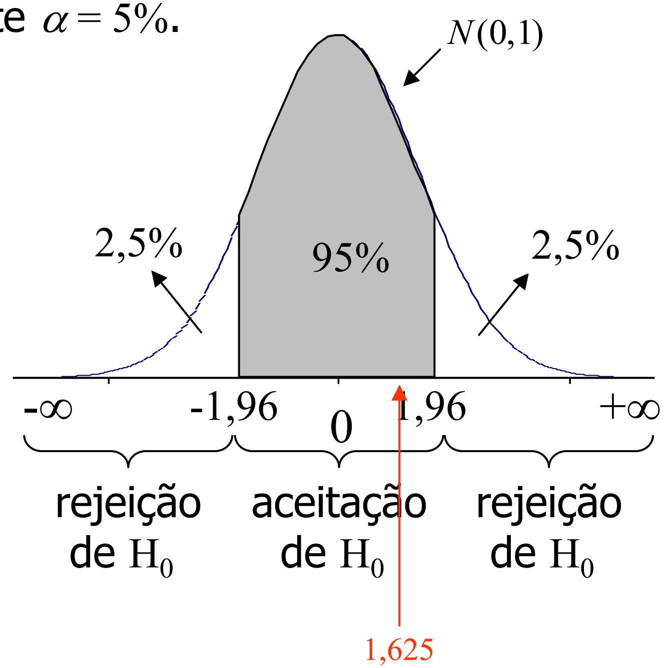
$H_0 : \mu = 10$ (hipótese nula)

$H_1 : \mu \neq 10$ (hipótese alternativa)

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{4}{5}} \sim N(0,1) \qquad z = \frac{11,3 - 10}{\frac{4}{5}} = 1,625$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $-1,96 < z < 1,96$
- rejeito H_0 caso contrário

Conclusão: Aceito H_0, ou seja, não há razões para discordar que a média μ seja de fato 10, adotando-se 5% de significância

Teste de Hipótese para μ

Em alguns casos, há evidências de que, se o parâmetro não for aquele definido na hipótese nula, ele será maior ou então menor do que o valor testado.

No exemplo anterior, $\bar{X} = 11{,}3$

Com esta média amostral, pode-se pensar que o verdadeiro valor de μ é na realidade maior do que aquele definido na hipótese nula ($H_0 : \mu = 10$).

Neste caso, pode-se definir a hipótese alternativa como unilateral.

Teste de Hipótese para μ

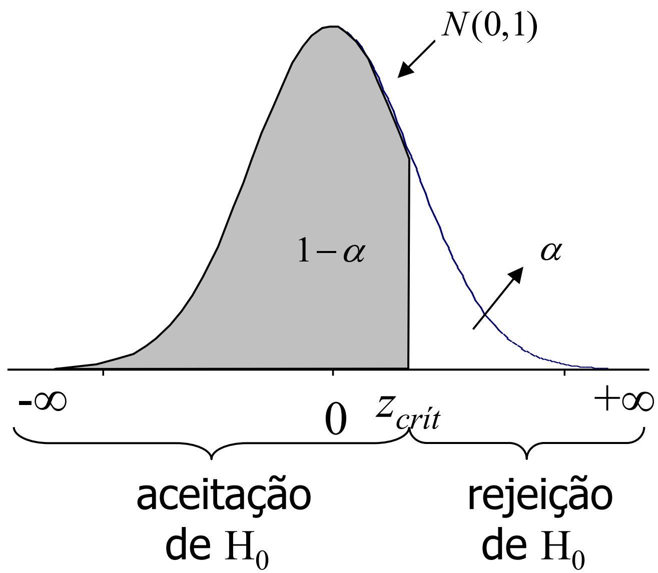
Uma amostra de 25 valores foi selecionada, chegando a uma média amostral $\bar{X}$ igual a 11,3. Poderia esta média amostral ter sido obtida de uma população com média $\mu = 10$? Por simplificação, consideremos que $\sigma^2 = 16$. Adote $\alpha = 5\%$.

Hipóteses

$H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu > 10$ (teste unilateral)

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$



Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Região Crítica: se H_0 for falso, então espera-se valores de z bem maiores que zero.

- aceito H_0 se $z < z_{crít}$ $\rightarrow P(z < z_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário $\rightarrow P(z > z_{crít}) = \alpha$

Conclusão (sempre associada a um nível de significância α)

Teste de Hipótese para μ

Uma amostra de 25 valores foi selecionada, chegando a uma média amostral $\bar{X}$ igual a 11,3. Poderia esta média amostral ter sido obtida de uma população com média $\mu = 10$? Por simplificação, consideremos que $\sigma^2 = 16$. Adote $\alpha = 5\%$.

Hipóteses

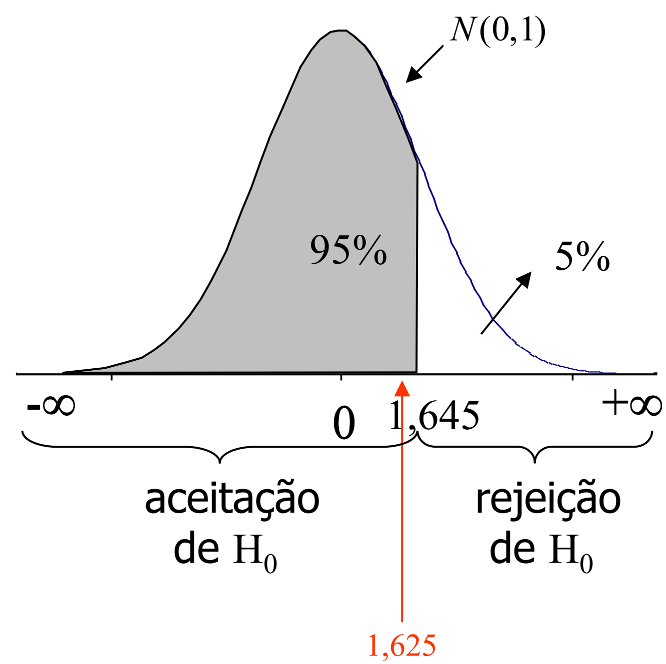
$H_0 : \mu = 10$

$H_1 : \mu > 10$ (teste unilateral)

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \qquad z = \frac{11,3 - 10}{\frac{4}{5}} = 1,625$$



Região Crítica:

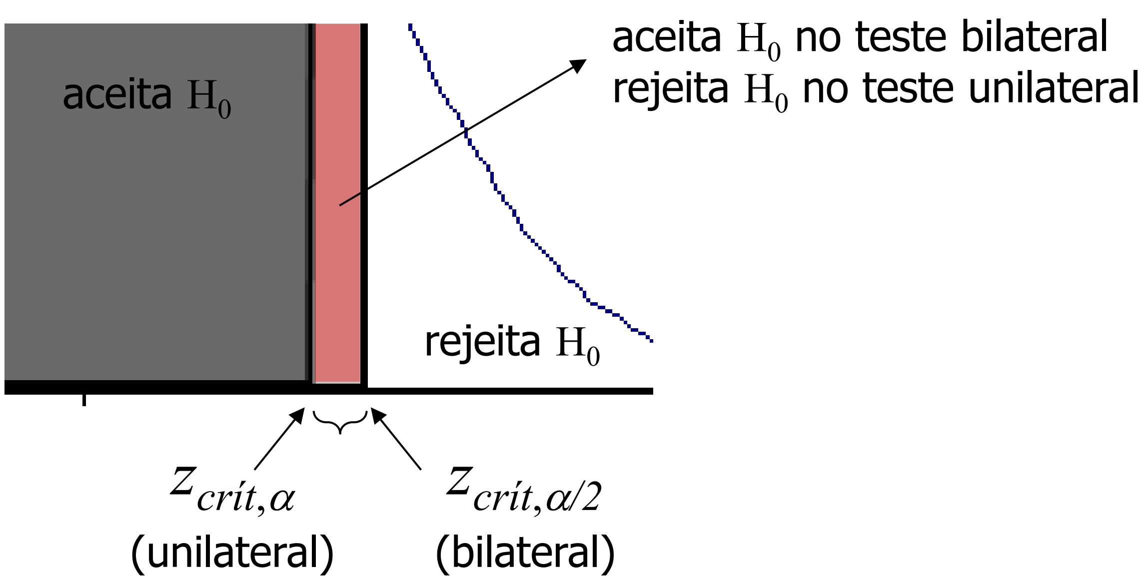
- aceito H_0 se $z < 1,645$
- rejeito H_0 caso contrário

Conclusão: Aceito H_0, ou seja, não há razões para discordar que a média μ seja de fato 10, adotando-se 5% de significância

Testes uni ou bilaterais?

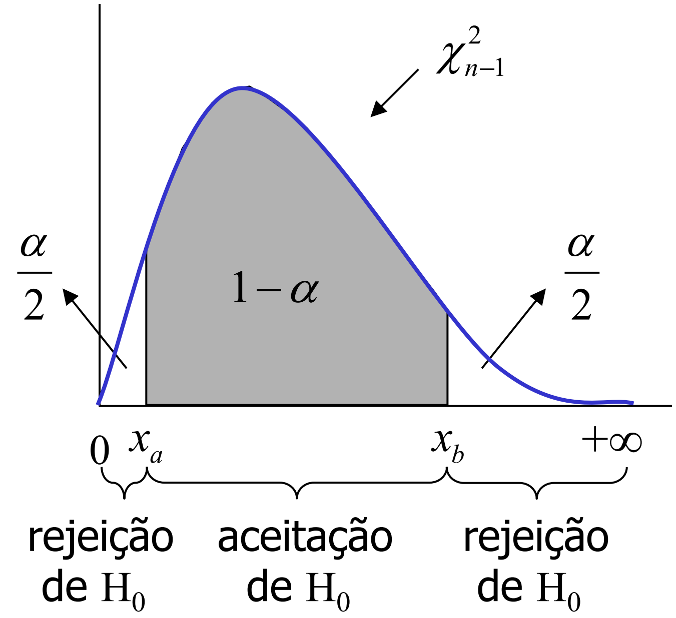
A escolha da abordagem é feita antes mesmo de se realizar o teste com base em conhecimentos prévios ou pode ser escolhida após a obtenção da estatística. Alguns testes são, por definição, unilaterais.

Há uma preferência em se adotar testes unilaterais pois são considerados "mais rigorosos", rejeitando-se H_0 em casos em que testes bilaterais a aceitarão.



Teste de Hipótese para σ^2

Uma v.a. qualquer tem uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 desconhecidas. Retira-se uma amostra de 25 valores e calcula-se a variância amostral. Teste a hipótese de que a verdadeira variância σ^2 seja igual a 4.



Hipóteses

$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = 4$ (hipótese nula)

$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq 4$ (hipótese alternativa)

$$X = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$X = \frac{(n-1)s^2}{4} \sim \chi^2_{n-1}$$

Região Crítica:

- aceito H_0 se $x_a < X < x_b$ $\rightarrow P(x_a < X < x_b) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário

Conclusão (sempre associada a um nível de significância α)

Teste de Hipótese para σ^2

Uma v.a. qualquer tem uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 desconhecidas. Retira-se uma amostra de 25 valores e calcula-se a variância amostral. Teste a hipótese de que a verdadeira variância σ^2 seja igual a 4. Suponha que $s^2 = 2{,}34$. Considere $\alpha = 5\%$.

Hipóteses

$H_0 : \sigma^2 = 4$

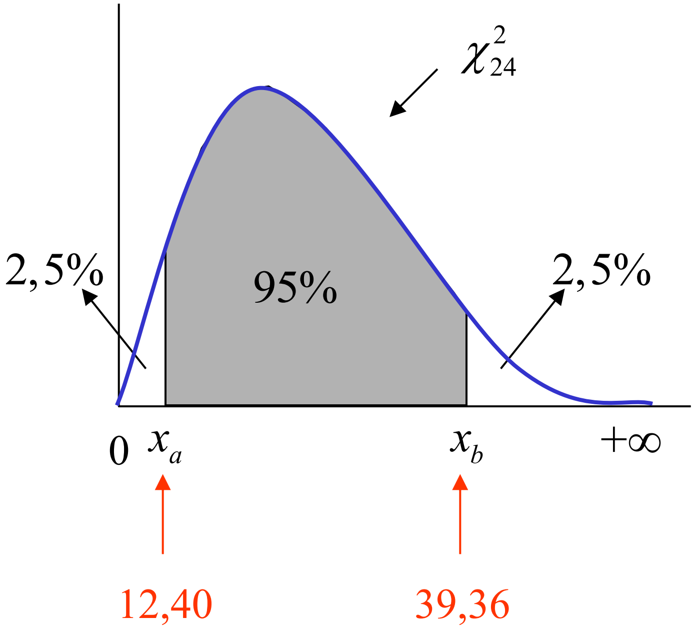
$H_1 : \sigma^2 \neq 4$

poderia ter sido adotado abordagem unilateral

$$X = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$X = \frac{24s^2}{4} \sim \chi^2_{24} \qquad X = \frac{24.2{,}34}{4} = 14{,}04$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $12{,}40 < X < 39{,}36$
- rejeito H_0 caso contrário

Conclusão: Aceito H_0, ou seja, não há razões para discordar que, a 5%, $\sigma^2 = 4$.

Teste de Hipótese para μ com σ^2 desconhecida

Uma v.a. qualquer tem uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 desconhecidas.
Retira-se uma amostra de 25 valores e calcula-se a média amostral e a variância amostral.
Supondo que $\bar{X}=12{,}7$ e $s^2 = 4{,}5$, teste a hipótese unilateral de que $\mu = 15$.

Hipóteses

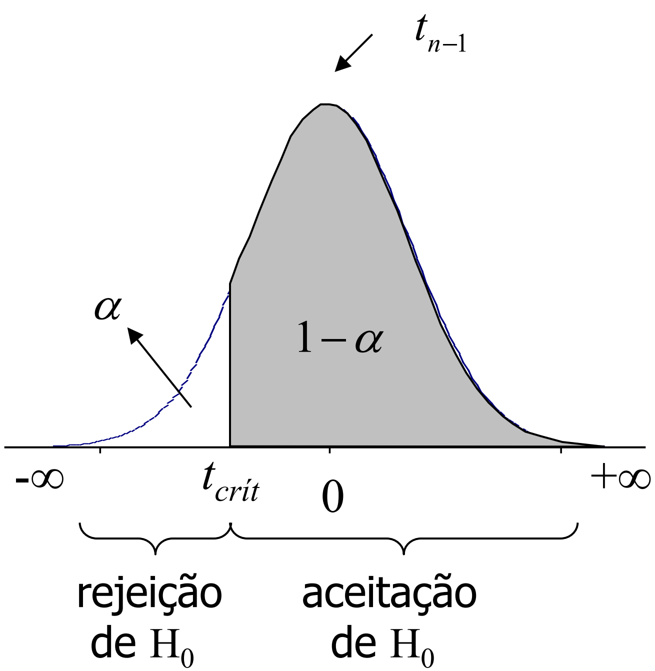
$\mathrm{H}_0 : \mu = 15$ (hipótese nula)

$\mathrm{H}_1 : \mu < 15$ (hipótese alternativa unilateral)

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$t = \frac{\bar{X} - 15}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $t > t_{crít}$ $\rightarrow P(t > t_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário

Conclusão (sempre associada a um nível de significância α)

Teste de Hipótese para μ com σ^2 desconhecida

Uma v.a. qualquer tem uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 desconhecidas. Retira-se uma amostra de 25 valores e calcula-se a média amostral e a variância amostral. Supondo que $\bar{X}=12{,}7$ e $s^2 = 4{,}5$, teste a hipótese unilateral de que $\mu = 15$. Considere $\alpha = 1\%$.

Hipóteses

$H_0 : \mu = 15$

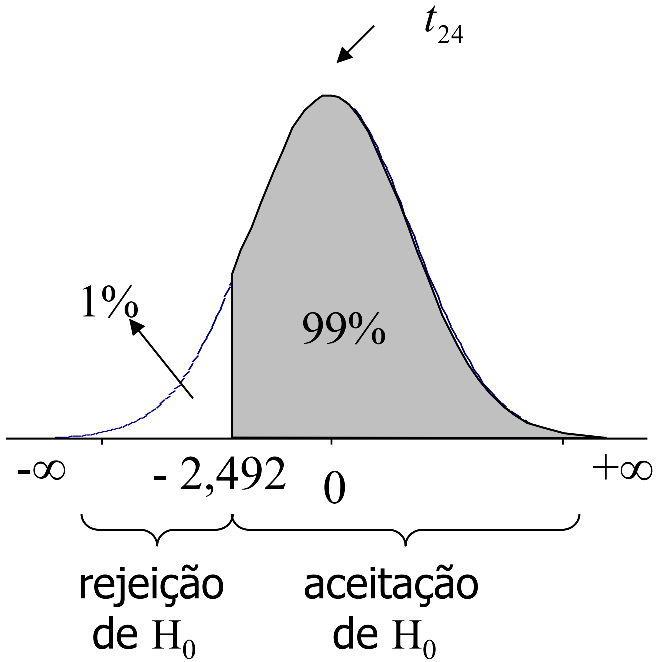
$H_1 : \mu < 15$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$t = \frac{\bar{X} - 15}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{24}$$

$$t = \frac{12{,}7 - 15}{\frac{2{,}12}{\sqrt{25}}} = -5{,}43$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $t > -2{,}492$
- rejeito H_0 caso contrário

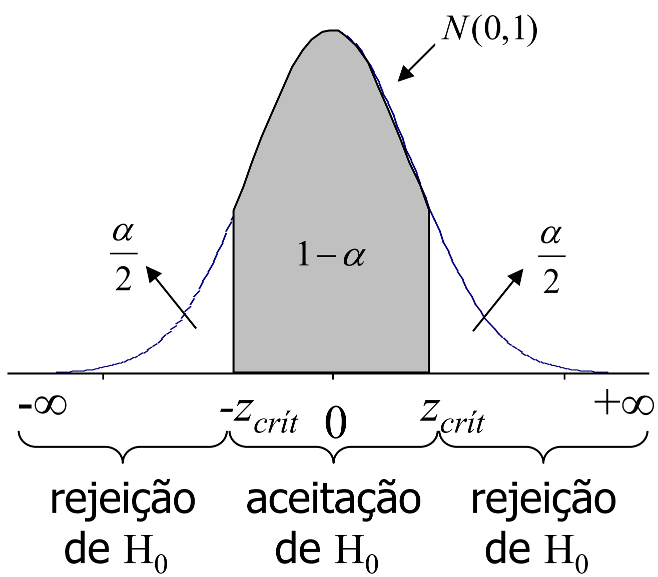
Conclusão: rejeito H_0, ou seja, a média é significativamente (a 1%) menor que 15

Teste de Hipótese para p

Hipóteses

$H_0: p = p_0$
$H_1: p \neq p_0$

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$



Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}} \sim N(0,1)$$

diferença para a abordagem do IC para p

Região Crítica:

- aceito H_0 se $-z_{crít} < z < z_{crít}$ $\rightarrow P(-z_{crít} < z < z_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário $\rightarrow P(|z| > z_{crít}) = \alpha$

Conclusão (sempre associada a um nível de significância α)

Teste de Hipótese – Erros I e II

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância e portanto não pode ser considerado 100% confiável.

Imagine a seguinte situação:

Hipóteses

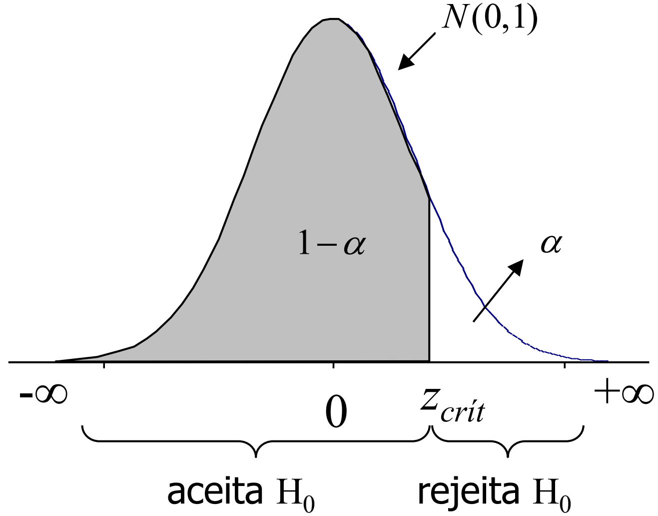
$H_0: \mu = \mu_0$

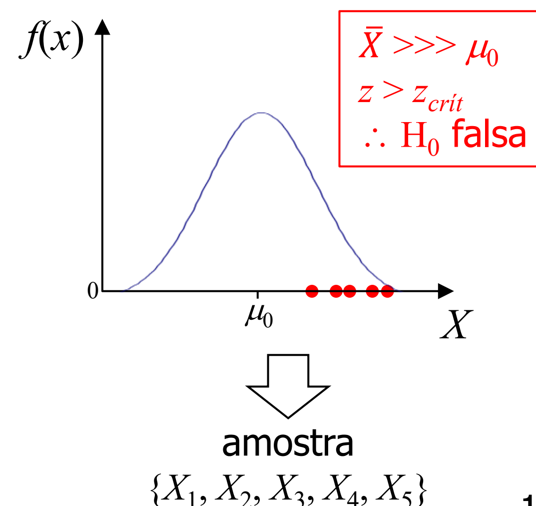
$H_1: \mu > \mu_0$

Mesmo sendo H_0 verdadeira, existe a possibilidade de se selecionar uma amostra desta população e obter uma média amostral $\bar{X}$ tão alta que leve a conclusão errada de que H_0 é falsa?

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$





Teste de Hipótese – Erros I e II

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância e portanto não pode ser considerado 100% confiável.

Imagine a seguinte situação:

Hipóteses

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Mesmo sendo H_0 verdadeira, existe a possibilidade de se selecionar uma amostra desta população e obter uma média amostral $\bar{X}$ tão alta que leve a conclusão errada de que H_0 é falsa?

Sim. Este erro é chamado de erro do tipo I e equivale ao nível de significância α.

Este erro é sempre conhecido sendo, em geral, definido previamente pelo tomador de decisão.

Teste de Hipótese – Erros I e II

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância e portanto não pode ser considerado 100% confiável.

Imagine a seguinte situação:

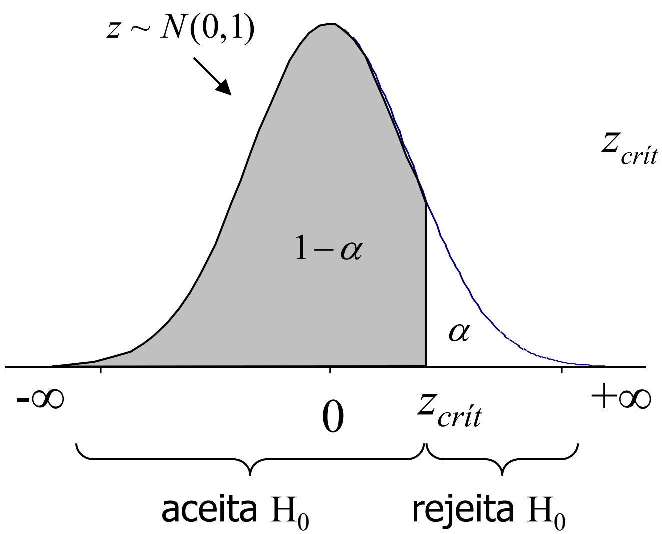
Hipóteses

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Se H_0 fosse verdadeira: $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Agora, sendo H_0 falsa, existe a possibilidade de se selecionar uma amostra desta população cuja média verdadeira é μ_1 ($> \mu_0$) e obter uma média amostral $\bar{X}$ tão pequena que leve a conclusão errada de que H_0 é verdadeira?



$$z_{crít} = \frac{\bar{X}_{crít} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Se olharmos do ponto de vista de $\bar{X}$, há portanto um valor limite a partir do qual, rejeitaríamos H_0

Teste de Hipótese – Erros I e II

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância e portanto não pode ser considerado 100% confiável.

Imagine a seguinte situação:

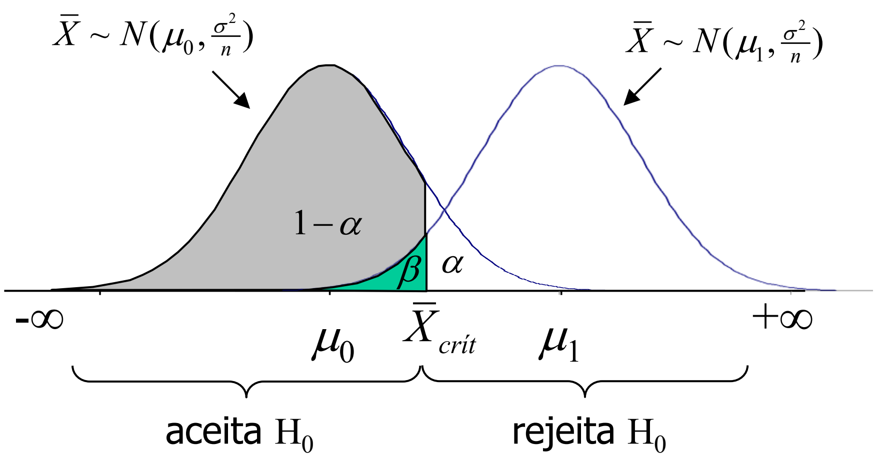
Hipóteses

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Se H_0 for, de fato, falsa: $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}) \quad \mu_1 > \mu_0$

Agora, sendo H_0 falsa, existe a possibilidade de se selecionar uma amostra desta população cuja média verdadeira é μ_1 ($> \mu_0$) e obter uma média amostral $\bar{X}$ tão pequena que leve a conclusão errada de que H_0 é verdadeira?



Sim. Este erro é chamado de erro do tipo II ou erro β.

$$\bar{X}_{crít} = \mu_0 + z_{crít} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Teste de Hipótese – Erros I e II

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância e portanto não pode ser considerado 100% confiável.

Imagine a seguinte situação:

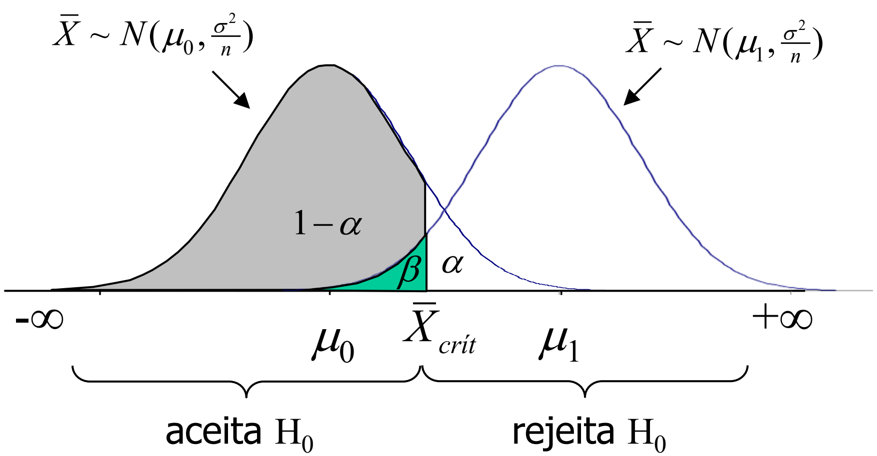
Hipóteses

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Se H_0 for, de fato, falsa: $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}) \quad \mu_1 > \mu_0$

Agora, sendo H_0 falsa, existe a possibilidade de se selecionar uma amostra desta população cuja média verdadeira é μ_1 (> μ_0) e obter uma média amostral $\bar{X}$ tão pequena que leve a conclusão errada de que H_0 é verdadeira?



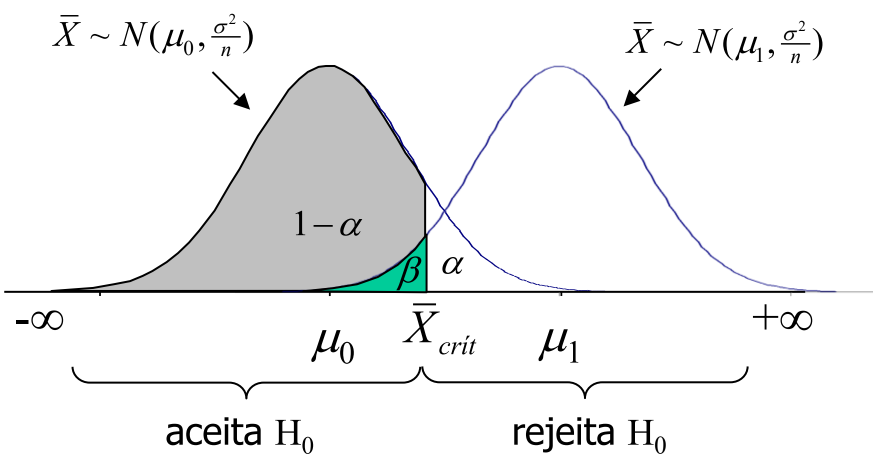
Sim. Este erro é chamado de erro do tipo II ou erro β.

Este erro é quase sempre negligenciado sendo influenciado por diversos fatores (ver detalhes adiante).

Teste de Hipótese – Erros I e II

Hipóteses

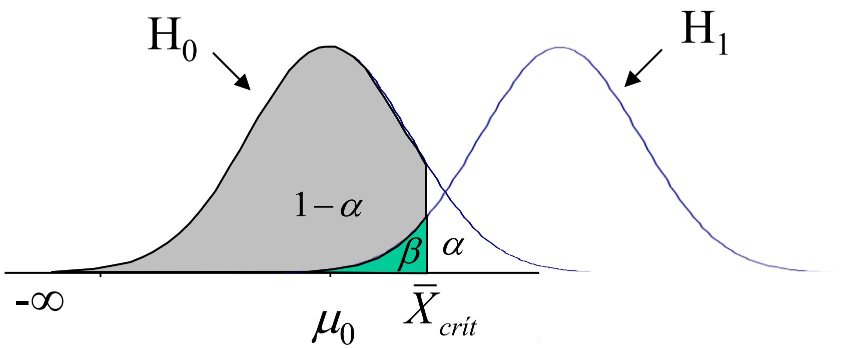
$H_0: \mu = \mu_0$
$H_1: \mu > \mu_0$



	H_0 é verd.	H_0 é falso
Aceita H_0	$1 - \alpha$	β
Rejeita H_0	α	$1 - \beta$

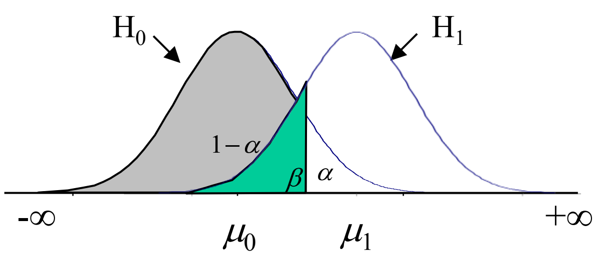
P(rejeitar H_0 / H_0 é verdadeira) = α (nível de significância ou erro do tipo I) ✗
P(aceitar H_0 / H_0 é verdadeira) = $1 - \alpha$ (nível de confiança) ✓
P(aceitar H_0 / H_1 é verdadeira) = β (erro do tipo II) ✗
P(rejeitar H_0 / H_1 é verdadeira) = $1 - \beta$ (poder do teste) ✓

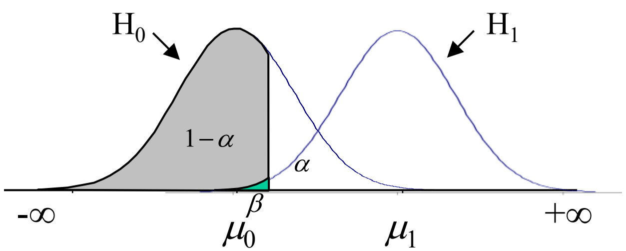
Erro tipo II (erro β)

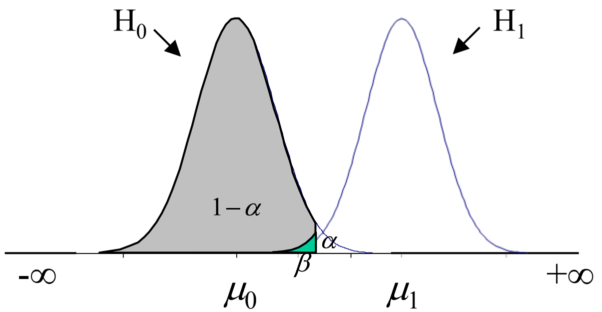


O que influencia β?

- distância entre μ_1 e μ_0
- α
- n







Menor distância entre μ_0 e μ_1
Maior β

Maior α
Menor β

Maior n
Menor β

Qual é a melhor alternativa para diminuir β?
- aumentar o n $\leftarrow$ sempre a melhor opção!!!

OBS: há fórmulas específicas para cálculo do tamanho de amostra (n) que consideram ambos os erros tipo I e II

Cálculo do erro tipo II (erro β)

Exemplo: uma amostra de 25 valores foi selecionada, chegando-se a uma média amostral $\bar{X}$ igual a 11,3. Através de um teste z unilateral, chegou-se a conclusão de que a verdadeira média μ poderia ser igual a 10, adotando-se um nível de significância de 5% (considerando $\sigma^2 = 16$). Mas qual a probabilidade de chegarmos a esta mesma conclusão, sendo a verdadeira média igual a 12, ou seja, qual o valor de β ?

$H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu > 10$

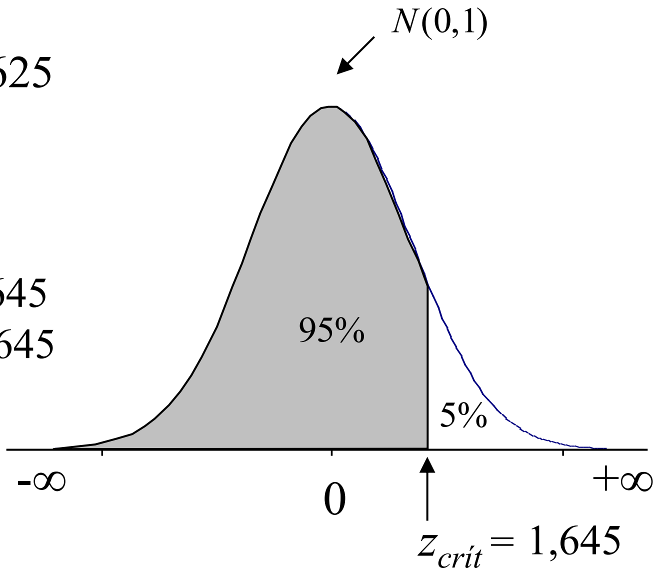
$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - 10}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$z = \frac{11,3 - 10}{\frac{4}{5}} = 1,625$$

aceito H_0 se $z < 1,645$
rejeito H_0 se $z > 1,645$



Conclusão:

Aceito H_0, ou seja, a média μ pode ser mesmo 10 considerando 5% de significância

Cálculo do erro tipo II (erro β)

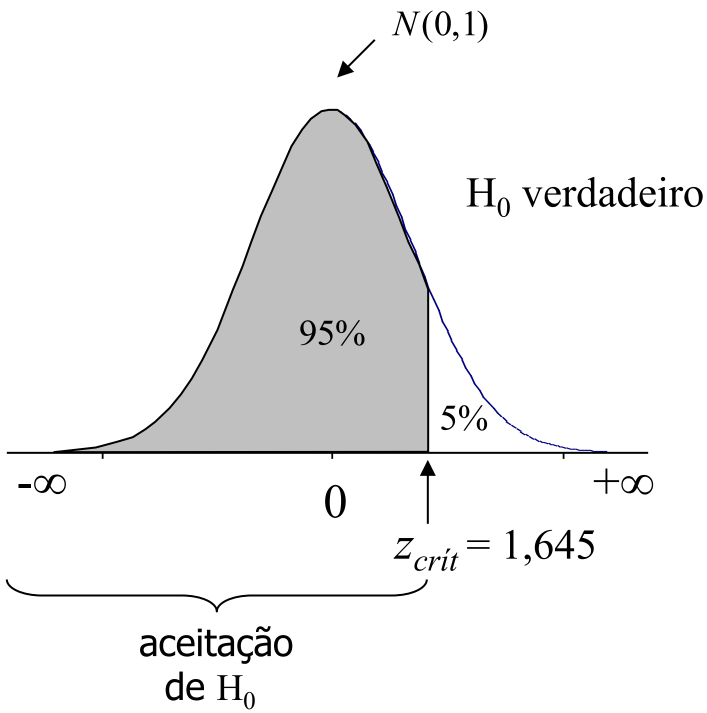
Agora, considerando $\mu = 12$

$$H_0 : \mu = 10$$
$$H_1 : \mu = 12$$

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \,/\, H_1 \text{ é verdadeiro})$$

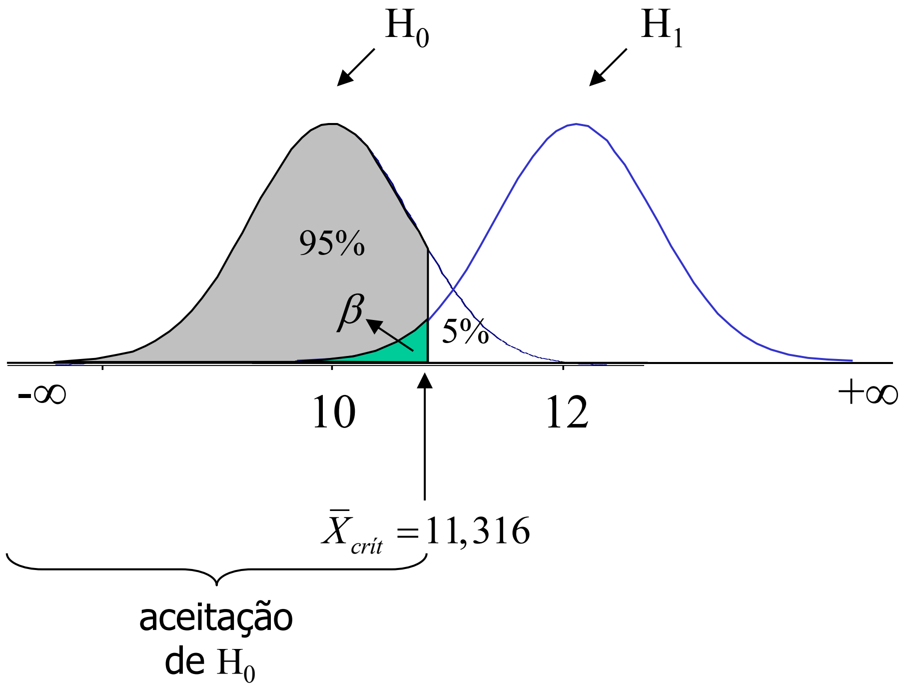
$$P(\text{aceitar } H_0) = P(Z < 1,645)$$

$$P(\text{aceitar } H_0) = P\left(\frac{\bar{X} - 10}{\frac{4}{5}} < 1,645\right)$$



Cálculo do erro tipo II (erro β)

Agora, considerando μ = 12



$H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu = 12$

$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \,/\, H_1 \text{ é verdadeiro})$

$$P(\text{aceitar } H_0) = P(Z < 1,645)$$

$$P(\text{aceitar } H_0) = P\left(\frac{\bar{X} - 10}{\frac{4}{5}} < 1,645\right)$$

$$P(\text{aceitar } H_0) = P(\bar{X} < 11,316)$$

$$\beta = P(\bar{X} < 11,316 \,/\, \mu = 12) = P\left(\frac{\bar{X} - 12}{\frac{4}{5}} < \frac{11,316 - 12}{\frac{4}{5}}\right)$$

$$\beta = P(Z < -0,855) = P(Z > 0,855) = 0,1963 = \boxed{19,63\%}$$

Mas, e para outras hipóteses alternativas?

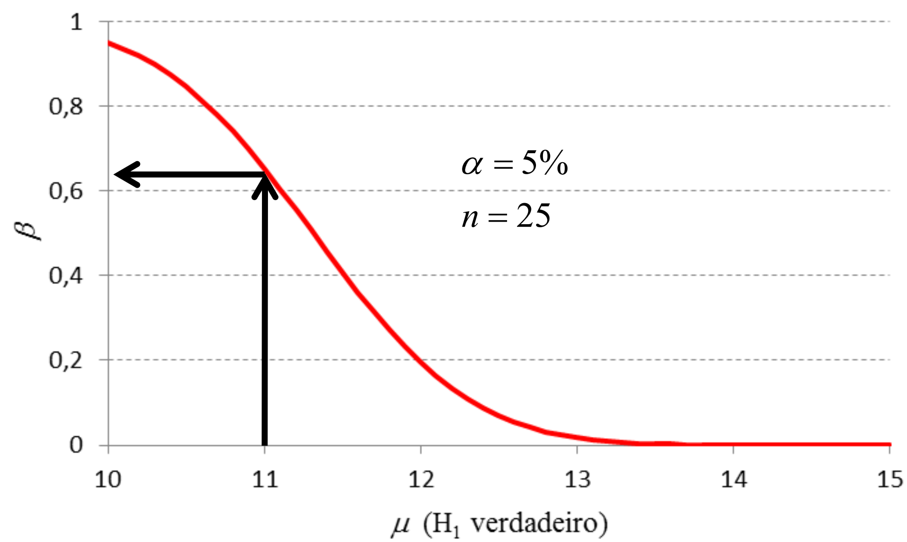
Cálculo do erro tipo II (erro β)

Considerando que a verdadeira média μ seja de fato igual a 11...

$H_0 : \mu = 10$
$H_1 : \mu = 11$

$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \,/\, H_1 \text{ é verdadeiro})$

$\beta = 65,36\%$



Este resultado indica que há uma alta probabilidade de se aceitar erroneamente a hipótese de que a média μ é igual a 10, mesmo sendo, de fato, a média μ igual a 11

Mas como diminuir este erro, conservando-se o mesmo nível de significância (α)?

<< aumentando-se o tamanho da amostra! >>

Cálculo do erro tipo II (erro β)

Considerando que a verdadeira média μ seja de fato igual a 11...

$H_0: \mu = 10$
$H_1: \mu = 11$

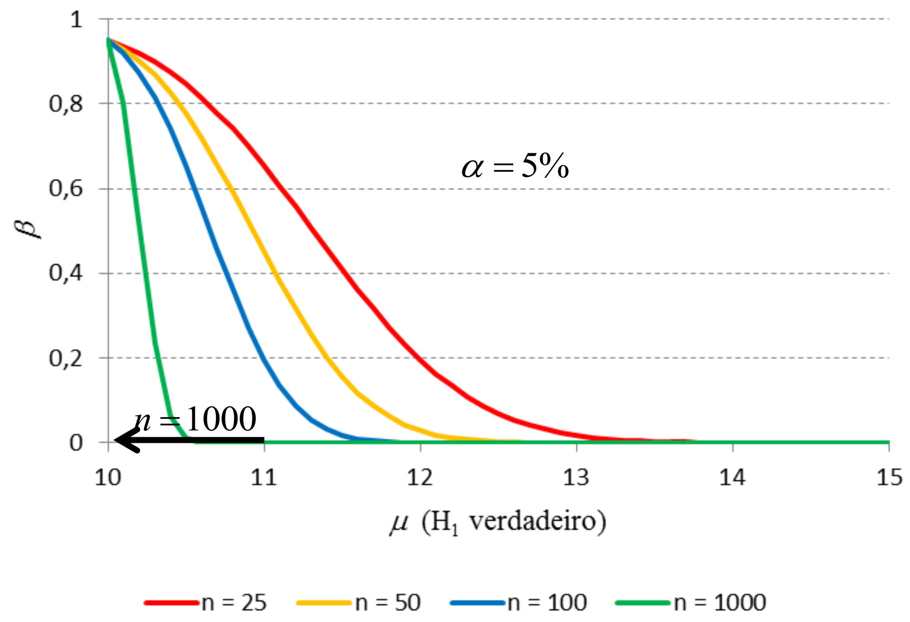
$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \,/\, H_1 \text{ é verdadeiro})$

$\beta = 65{,}36\%$ para $n = 25$

$\beta = 45{,}11\%$ para $n = 50$

$\beta = 19{,}62\%$ para $n = 100$

$\beta = 1{,}91.10^{-8}\%$ para $n = 1000$



Teste de Hipótese – valor-P (*p-value*)

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância.

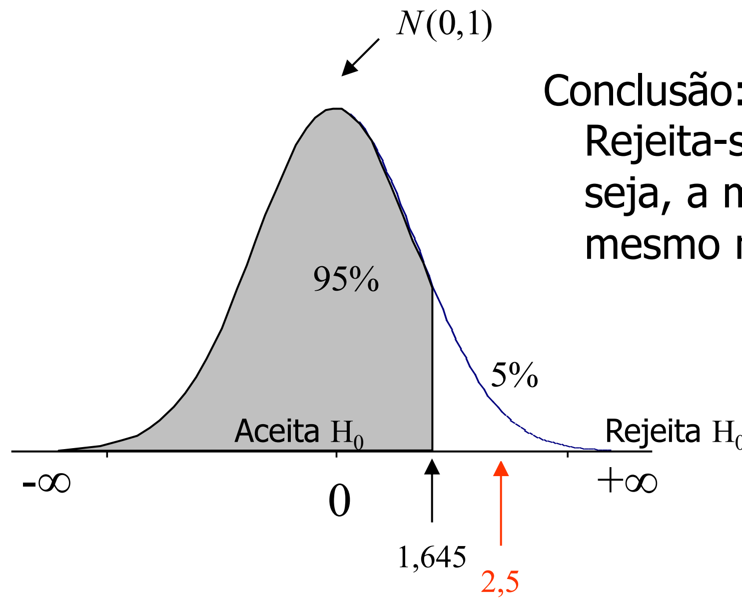
Por exemplo: "Com base num teste z unilateral a 5% de significância, pôde-se concluir que a média μ é maior que 20 uma vez que a estatística z obtida foi de 2,5 ($z_{\text{crítico}}$ = 1,645)".

$$H_0 : \mu = 20$$
$$H_1 : \mu > 20$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$z = 2,5$$



Conclusão:

Rejeita-se H_0 a 5%, ou seja, a média μ parece ser mesmo maior que 20.

A média μ continuaria ser significativamente maior do que 20 se fosse adotado um nível de significância de 1%?

Para responder a esta pergunta, é necessário calcular o novo z crítico!

Teste de Hipótese – valor-P (*p-value*)

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância.

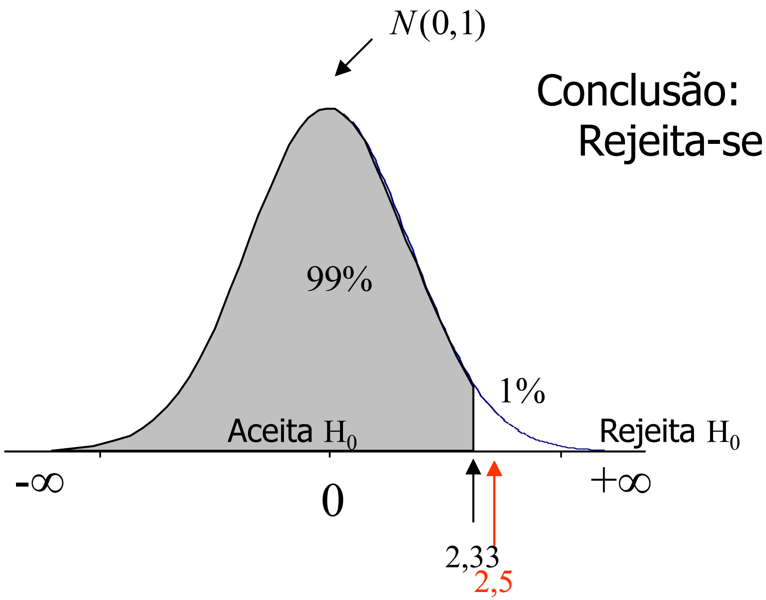
Por exemplo: "Com base num teste z unilateral a 5% de significância, pôde-se concluir que a média μ é maior que 20 uma vez que a estatística z obtida foi de 2,5 ($z_{\text{crítico}}$ = 1,645)".

$$H_0 : \mu = 20$$
$$H_1 : \mu > 20$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$z = 2,5$$



Conclusão:
Rejeita-se H_0 a 1%

Para α = 1%, $z_{\text{crítico}}$ = 2,33. Sendo assim, rejeita-se H_0, ou seja, μ pode ser considerado maior que 20.

Para que valores de α, a média μ poderia ser considerada igual a 20?

Teste de Hipótese – valor-P (*p-value*)

Toda conclusão de um teste de hipótese está associada a um nível de significância.

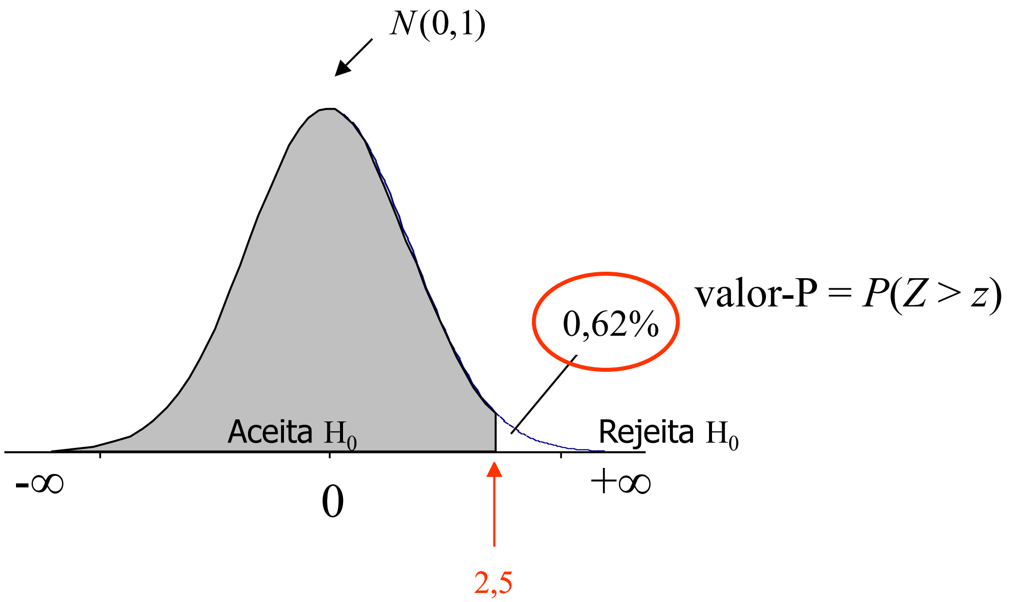
Por exemplo: "Com base num teste z unilateral a 5% de significância, pôde-se concluir que a média μ é maior que 20 uma vez que a estatística z obtida foi de 2,5 ($z_{\text{crítico}}$ = 1,645)".

$$H_0 : \mu = 20$$
$$H_1 : \mu > 20$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$z = 2,5$$



Para α = 1%, $z_{\text{crítico}}$ = 2,33. Sendo assim, rejeita-se H_0, ou seja, μ pode ser considerado maior que 20.

Para que valores de α, a média μ poderia ser considerada igual a 20?

Pode-se aceitar H_0 para qualquer nível de significância (α) menor que 0,62% uma vez que valor-P = $P(Z > 2,5)$ = 0,62%

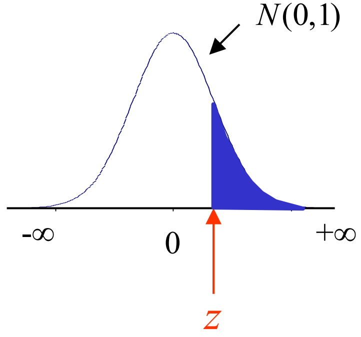
Teste de Hipótese – valor-P (*p-value*)

De fato, o valor-P refere-se à probabilidade de se obter uma estatística com um valor tão extremo (muito grande ou muito pequeno) quanto ao obtido para uma amostra em particular.

Este conceito pode ser aplicado para qualquer distribuição.

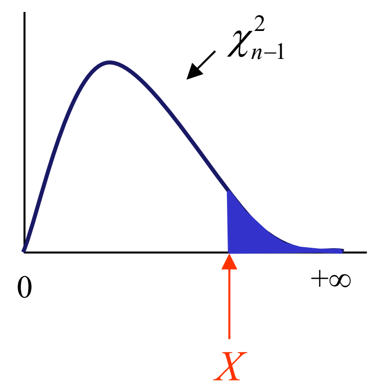
Mas qual lado da distribuição devo escolher?

$\Rightarrow$ Sempre o lado que inclui a área de rejeição de H_0



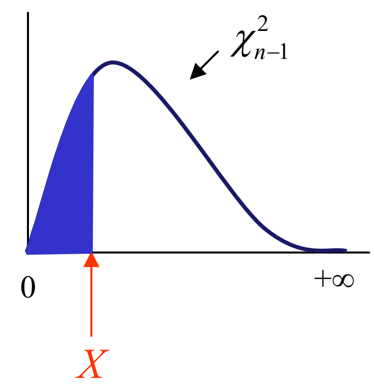
Rejeito H_0 se $z > z_{crít}$

valor-P = $P(Z > z)$



Rejeito H_0 se $X > X_{crít}$

valor-P = $P(\chi^2 > X)$



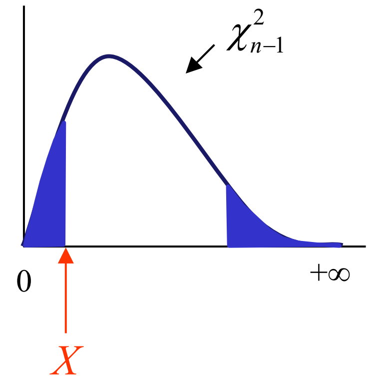
Rejeito H_0 se $X < X_{crít}$

valor-P = $P(\chi^2 < X)$

Teste de Hipótese – valor-P (*p-value*)

O valor-P quase sempre se refere a uma interpretação de um teste unilateral pois é calculado considerando-se apenas um dos lados da distribuição

Nos casos em que se pretende utilizar o valor-P para tirar conclusões a partir de testes bilaterais, basta multiplicar o valor-P por 2.



valor-P = $P(\chi^2 < X)$

valor-P bilateral = $2*P(\chi^2 < X)$

Para se calcular o valor-P, em geral, não é possível utilizar tabelas de probabilidade, necessitando o uso de funções específicas em programas como o R ou o Excel

R: pchisq(x,gl)
Excel: DIST.QUIQUA(x;gl;1)

⇒ ambas funções calculam a área a esquerda do ponto!

Na prática, H_0 será rejeitado toda vez que o valor-P for menor que o nível de significância (α) escolhido

Teste de Hipótese – valor-P (*p-value*)

Exemplo: Foram coletadas amostras (50 pontos) em mapas a fim de avaliar sua exatidão. Procedeu-se o teste z para verificar quais deles possuíam exatidão (p) de 0,90 (ou 90%). A tabela abaixo apresenta a exatidão estimada, o resultado do teste (estatística z) e o valor-P de cada mapa.

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\hat{p} - 0,9}{\sqrt{\frac{0,9\ 0,1}{50}}}$$

Hipóteses

$H_0 : p = 0,90$

$H_1 : p < 0,90$

	$\hat{p}$	z	valor-P
Mapa 1	0,87	-0,707	0,2397
Mapa 2	0,62	-6,600	$2,07.10^{-11}$
Mapa 3	0,82	-1,886	0,0297
Mapa 4	0,84	-1,414	0,0786

Quais mapas possuem exatidão menor que 0,90, com 5% de significância?

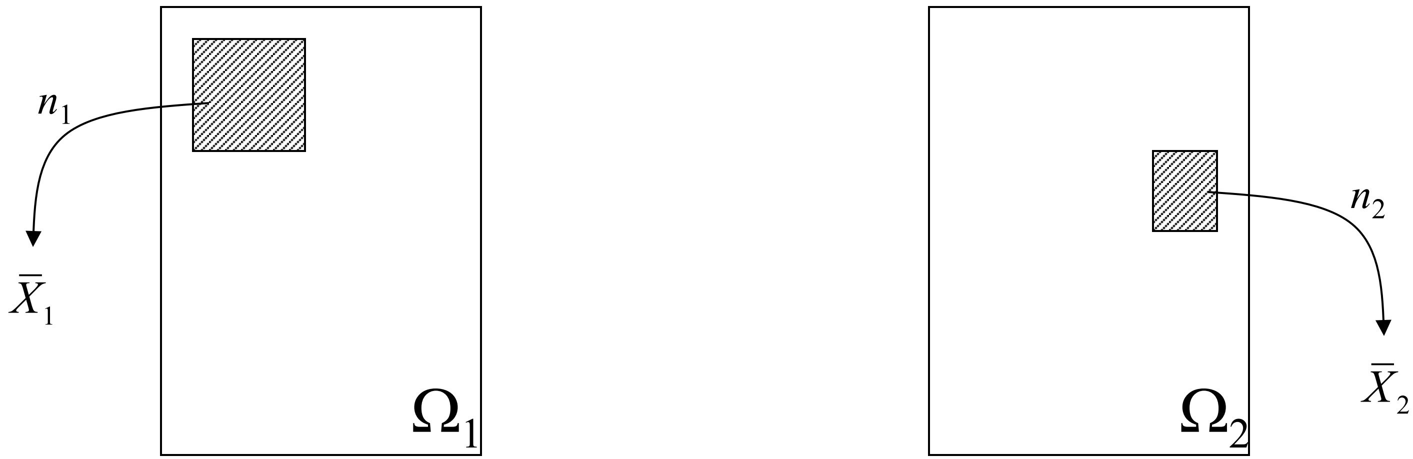
Mapas 2 e 3

Quais mapas possuem exatidão menor que 0,90, com 1% de significância?

Somente Mapa 2

OBS: Rejeito H_0 sempre que o valor-P for menor que α

Inferência entre parâmetros de duas populações



$E(X_1) = \mu_1$ $E(X_2) = \mu_2$

Mesmo não se conhecendo as médias μ_1 e μ_2, seria possível verificar se elas são iguais a partir de seus valores amostrais?

Se μ_1 e μ_2 são iguais, então $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Para avaliar se essa hipótese é válida, deve-se investigar a distribuição de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$

Teste de Hipótese para $\mu_1 = \mu_2$

Hipóteses

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \; (\mu_1 = \mu_2)$

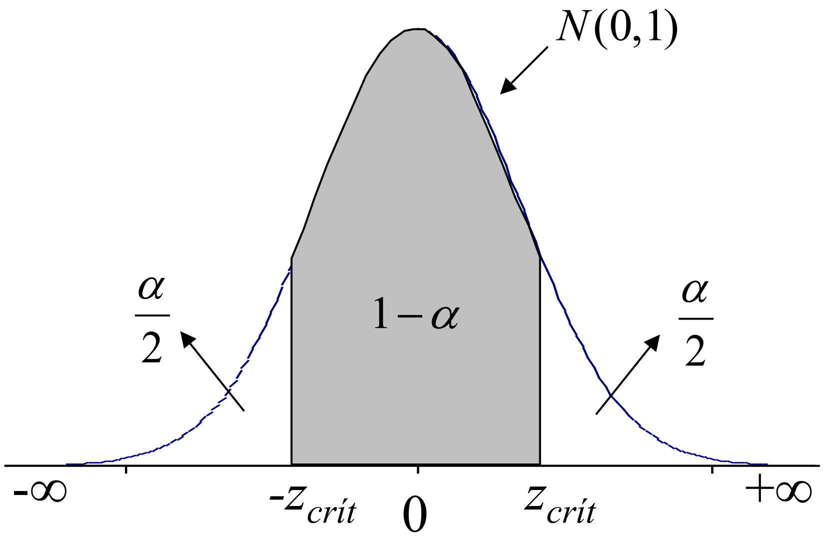
$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

μ_i desconhecidas, mas σ_i^2 conhecidas

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $-z_{crít} < z < z_{crít}$ $\rightarrow P(-z_{crít} < z < z_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário $\rightarrow P(|z| > z_{crít}) = \alpha$

Teste de Hipótese para $\mu_1 = \mu_2$

Hipóteses

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \ (\mu_1 = \mu_2)$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

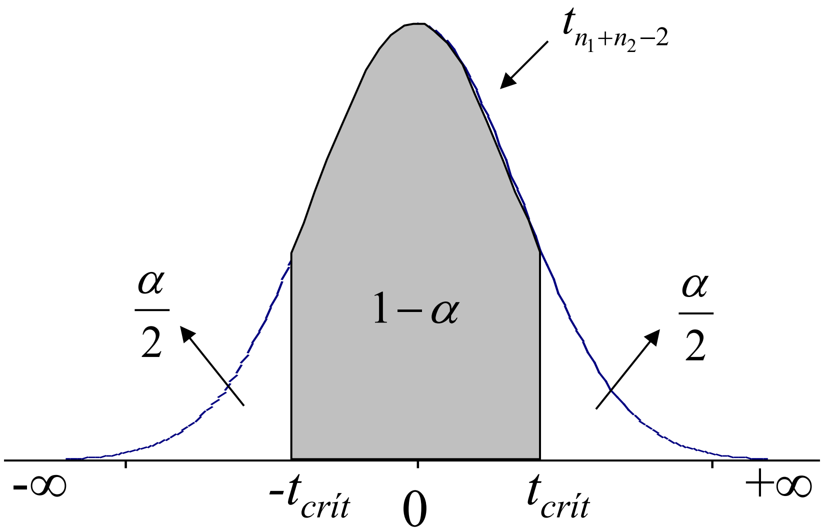
μ_i e σ_i^2 desconhecidas mas $\boxed{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$

(t homocedástico)

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $-t_{crít} < t < t_{crít}$ $\rightarrow P(-t_{crít} < t < t_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário $\rightarrow P(|t| > t_{crít}) = \alpha$

Teste de Hipótese para $\mu_1 = \mu_2$

Hipóteses

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \; (\mu_1 = \mu_2)$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

μ_i e σ_i^2 desconhecidas mas $\boxed{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$

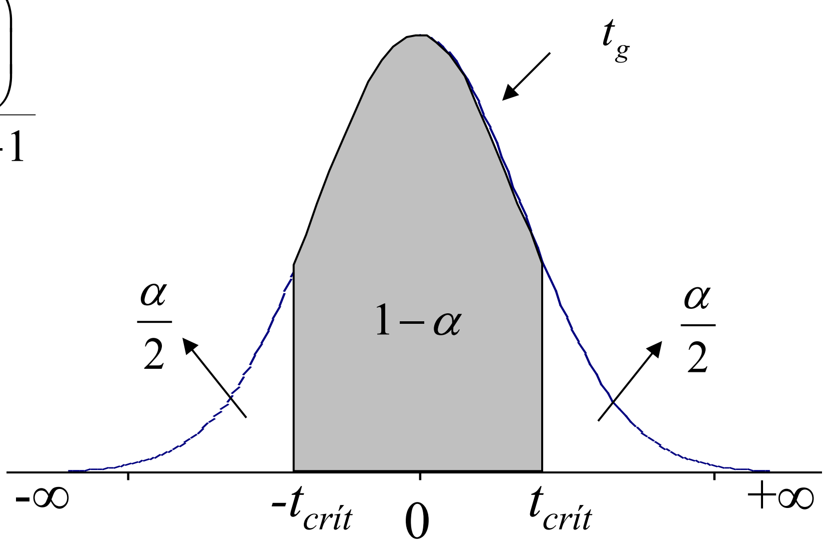
(t heterocedástico)

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_g$$

$$g \approx \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_g$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $-t_{crít} < t < t_{crít}$ $\rightarrow P(-t_{crít} < t < t_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário $\rightarrow P(|t| > t_{crít}) = \alpha$

Teste de Hipótese para $\mu_1 = \mu_2$

Exemplo: duas v.a. quaisquer têm distribuições normais com médias e variâncias desconhecidas. Retira-se uma amostra de cada população e calcula-se a média e a variância para cada amostra. Teste a hipótese de que as médias populacionais não diferem significativamente a 5% entre si, considerando que:

$$n_1 = 26 \quad \bar{X}_1 = 10,3 \quad s_1^2 = 2,34 \qquad\qquad n_2 = 41 \quad \bar{X}_2 = 15,7 \quad s_2^2 = 1,91$$

Usar teste t homocedástico ou heterocedástico?

primeiramente deve-se testar se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Teste de Hipótese para $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Exemplo: duas v.a. quaisquer têm distribuições normais com médias e variâncias desconhecidas. Retira-se uma amostra de cada população e calculam-se a média e a variância para cada amostra. Teste a hipótese de que as médias populacionais não diferem significativamente a 5% entre si, considerando que:

$$n_1 = 26 \quad \bar{X}_1 = 10,3 \quad s_1^2 = 2,34 \qquad\qquad n_2 = 41 \quad \bar{X}_2 = 15,7 \quad s_2^2 = 1,91$$

Hipóteses

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1 \quad (\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$$

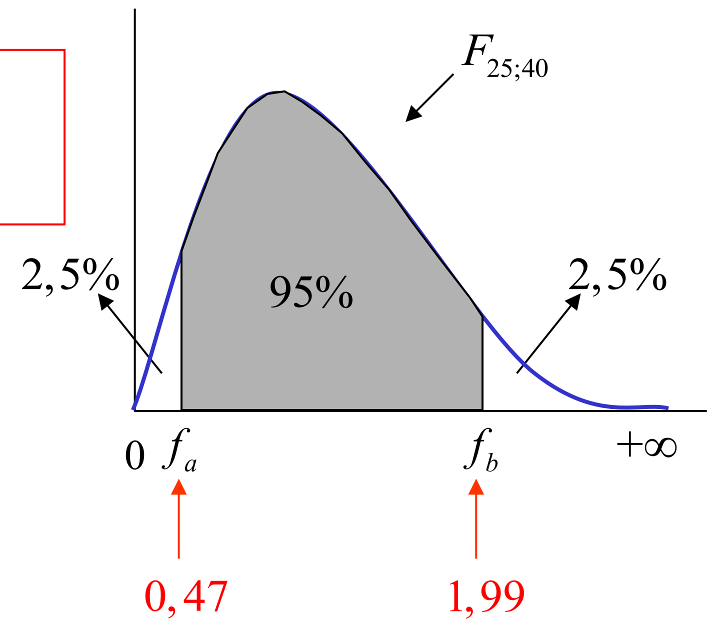
$$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$$

Sempre bilateral se o propósito é apenas escolher qual teste t utilizar

$$\frac{s_1^2 \sigma_2^2}{s_2^2 \sigma_1^2} \sim F_{n_1 - 1; n_2 - 1}$$

Se H_0 é verdadeira, então

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{n_1 - 1; n_2 - 1} \qquad F = \frac{2,34}{1,91} = 1,2251$$



Região Crítica:

- aceito H_0 se $0,47 < F < 1,99$
- rejeito H_0 caso contrário

Conclusão: Aceito H_0, ou seja, não há razões para discordar que, a 5%, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Teste de Hipótese para $\mu_1 = \mu_2$ (cont.)

Exemplo: duas v.a. quaisquer têm distribuições normais com médias e variâncias desconhecidas. Retira-se uma amostra de cada população e calcula-se a média e a variância para cada amostra. Teste a hipótese de que as médias populacionais não diferem significativamente a 5% entre si, considerando que:

$$n_1 = 26 \quad \bar{X}_1 = 10,3 \quad s_1^2 = 2,34 \qquad\qquad n_2 = 41 \quad \bar{X}_2 = 15,7 \quad s_2^2 = 1,91$$

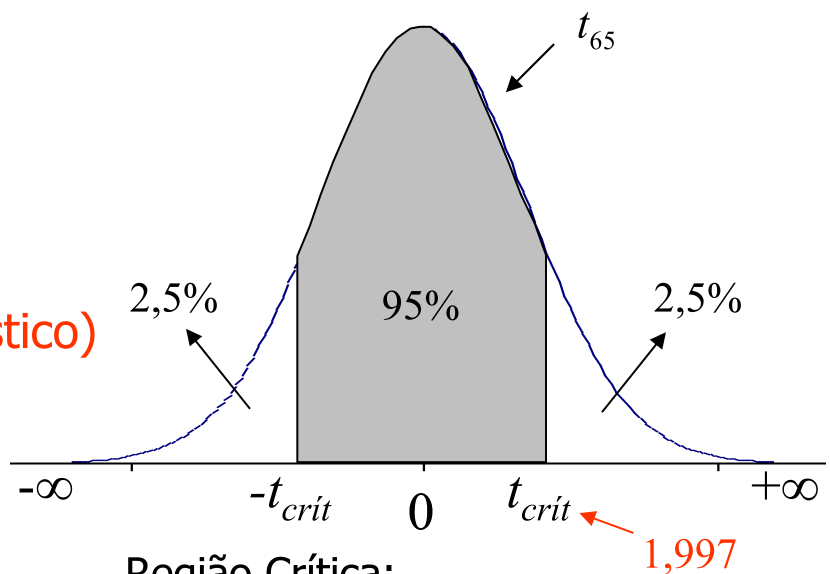
Hipóteses

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \ (\mu_1 = \mu_2)$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

(t homocedástico)



Se H_0 é verdadeira, então

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

$t = -14,9515$

Região Crítica:

- aceito H_0 se $-1,997 < t < 1,997$
- rejeito H_0 caso contrário

Conclusão: Rejeito H_0, ou seja, as médias são diferentes significativamente a 5%

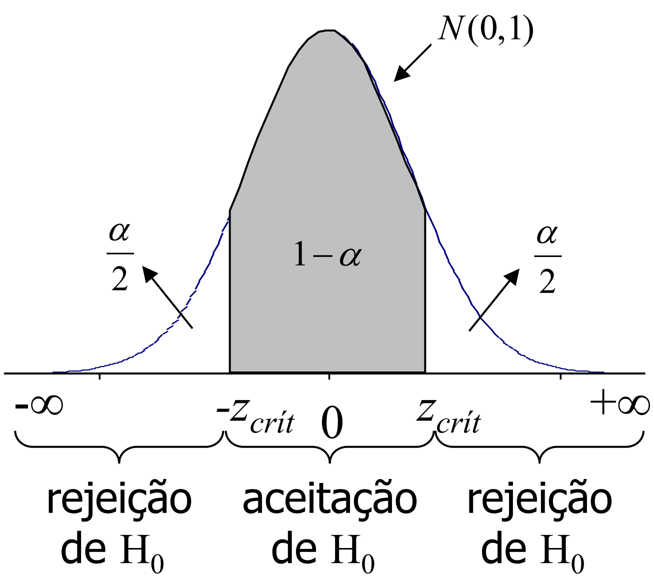
Teste de Hipótese para $p_1 = p_2$

Hipóteses

$H_0 : p_1 - p_2 = 0 \;\; (p_1 = p_2)$

$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\left(\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$



Se H_0 é verdadeira, então

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad \hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Região Crítica:

- aceito H_0 se $-z_{crít} < z < z_{crít}$ $\rightarrow P(-z_{crít} < z < z_{crít}) = 1 - \alpha$
- rejeito H_0 caso contrário $\rightarrow P(|z| > z_{crít}) = \alpha$

Conclusão (sempre associada a um nível de significância α)

Teste de Hipótese (resumo)

para μ $\begin{cases} N(0,1) & \text{se } \sigma^2 \text{ é conhecida} \\ t_{n-1} & \text{se } \sigma^2 \text{ é desconhecida} \end{cases}$

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

para σ^2 $\left\{ \chi^2_{n-1} \right.$ $\quad \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$

para μ_1 - μ_2 $\begin{cases} N(0,1) & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são conhecidas} \\ t_{n_1+n_2-2} & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são desconhecidas, mas } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ t_g & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são desconhecidas, mas } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

$$t_{\text{homo}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$t_{\text{hetero}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Teste de Hipótese (resumo)

para μ $\begin{cases} N(0,1) & \text{se } \sigma^2 \text{ é conhecida} \\ t_{n-1} & \text{se } \sigma^2 \text{ é desconhecida} \end{cases}$

para σ^2 $\left\{ \chi^2_{n-1} \right.$

para μ_1 - μ_2 $\begin{cases} N(0,1) & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são conhecidas} \\ t_{n_1+n_2-2} & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são desconhecidas, mas } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ t_g & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são desconhecidas, mas } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

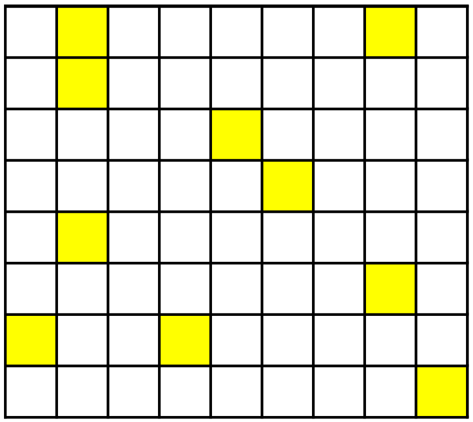
para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ $\left\{ F_{n_1-1,n_2-1} \right.$ $\quad F = \frac{s_1^2\sigma_2^2}{s_2^2\sigma_1^2}$

para p $\left\{ N(0,1) \right.$ $\quad z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$

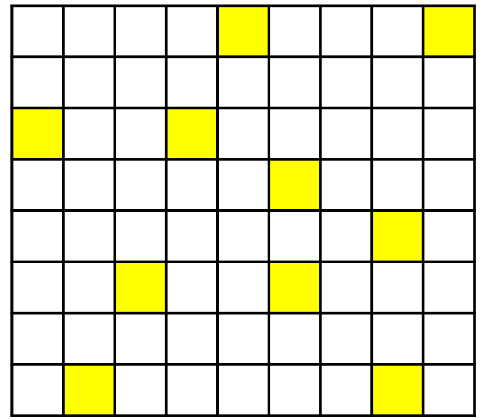
para $p_1 - p_2$ $\left\{ N(0,1) \right.$ $\quad z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \quad \hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$

Comparando médias em imagens...

10 pontos são escolhidos em cada imagem



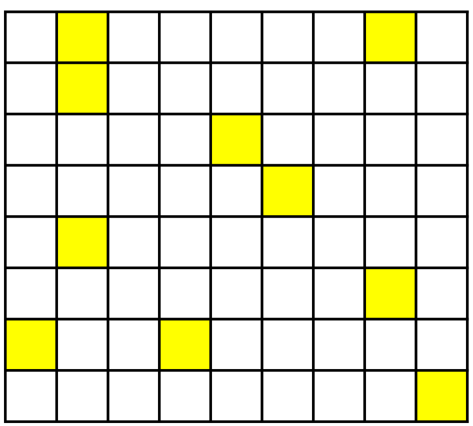
Esquema 1
escolha aleatória



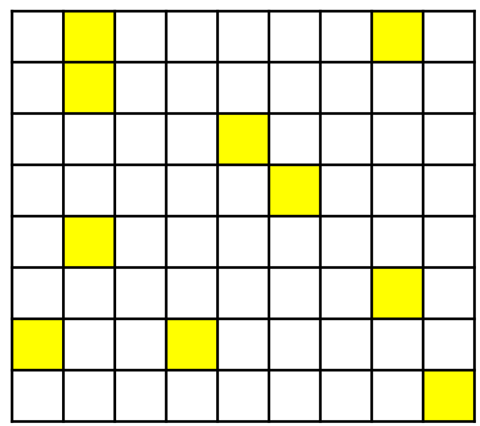
amostra	A	B
1	12	15
2	34	17
3	16	21
4	28	27
5	15	25
6	17	32
7	23	15
8	13	19
9	29	29
10	31	30

Imagem A

Imagem B



Esquema 2
mesma posição amostrada



amostra	A	B
1	12	11
2	34	37
3	16	18
4	28	27
5	15	18
6	17	19
7	23	24
8	13	15
9	29	32
10	31	33

Comparando médias em imagens...

Esquema 1

amostra	A	B
1	12	15
2	34	17
3	16	21
4	28	27
5	15	25
6	17	32
7	23	15
8	13	19
9	29	29
10	31	30

$\bar{X}_A = 21,8 \quad s_A^2 = 66,84$

$\bar{X}_B = 23,0 \quad s_B^2 = 41,11$

$\mathrm{H}_0 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 = 1$

$\mathrm{H}_1 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 \neq 1$

teste F

$\mathrm{H}_0 : \mu_A = \mu_B$

$\mathrm{H}_1 : \mu_A < \mu_B$

teste t (homo ou heterocedástico)

Esquema 2

amostra	A	B
1	12	11
2	34	37
3	16	18
4	28	27
5	15	18
6	17	19
7	23	24
8	13	15
9	29	32
10	31	33

Comparando médias em imagens...

Esquema 1

amostra	A	B
1	12	15
2	34	17
3	16	21
4	28	27
5	15	25
6	17	32
7	23	15
8	13	19
9	29	29
10	31	30

$\bar{X}_A = 21,8 \quad s_A^2 = 66,84$

$\bar{X}_B = 23,0 \quad s_B^2 = 41,11$

para teste bilateral multiplicar por 2

$\mathrm{H}_0 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 = 1 \quad F_{calc} = 1,63$ (valor-P = 0,24)

$\mathrm{H}_1 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 \neq 1$ Aceito H_0 a 5% $\Rightarrow$ usar teste t homocedástico

$\mathrm{H}_0 : \mu_A = \mu_B \quad t_{calc} = -0,37$ (valor-P = 0,36)

$\mathrm{H}_1 : \mu_A < \mu_B$ Aceito H_0 a 5% (as médias são iguais)

Esquema 2

amostra	A	B
1	12	11
2	34	37
3	16	18
4	28	27
5	15	18
6	17	19
7	23	24
8	13	15
9	29	32
10	31	33

$\bar{X}_A = 21,8 \quad s_A^2 = 66,84$

$\bar{X}_B = 23,4 \quad s_B^2 = 74,04$

$\mathrm{H}_0 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 = 1 \quad F_{calc} = 0,90$ (valor-P = 0,44)

$\mathrm{H}_1 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 \neq 1$ Aceito H_0 a 5% (usar teste t homocedástico)

$\mathrm{H}_0 : \mu_A = \mu_B \quad t_{calc} = -0,43$ (valor-P = 0,34)

$\mathrm{H}_1 : \mu_A < \mu_B$ Aceito H_0 a 5% (as médias são iguais)

As amostras não são independentes!!!

Teste t pareado

Esquema 1

amostra	A	B
1	12	15
2	34	17
3	16	21
4	28	27
5	15	25
6	17	32
7	23	15
8	13	19
9	29	29
10	31	30

$\bar{X}_A = 21,8 \quad s_A^2 = 66,84$

$\bar{X}_B = 23,0 \quad s_B^2 = 41,11$

$H_0 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 = 1 \quad F_{calc} = 1,63 \ \text{(valor-P = 0,24)}$

$H_1 : \sigma_A^2 / \sigma_B^2 \neq 1$ Aceito H_0 a 5% $\Rightarrow$ usar teste t homocedástico

$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad t_{calc} = -0,37 \ \text{(valor-P = 0,36)}$

$H_1 : \mu_A < \mu_B$ Aceito H_0 a 5% (as médias são iguais)

Esquema 2

amostra	A	B	A-B
1	12	11	1
2	34	37	-3
3	16	18	-2
4	28	27	1
5	15	18	-3
6	17	19	-2
7	23	24	-1
8	13	15	-2
9	29	32	-3
10	31	33	-2

Teste t pareado

$\bar{X}_{A-B} = -1,6 \quad s_{A-B}^2 = 2,27$

$H_0 : \mu_{A\text{-}B} = 0$

$H_1 : \mu_{A\text{-}B} < 0$

Se H_0 verdadeiro

$$t_{calc} = \frac{\bar{X}_{A-B}}{\frac{s_{A-B}}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$t_{calc} = -3,36$

(valor-P = 0,004)

Conclusão: Rejeito H_0 a 5%, ou seja, a média da diferença é menor que zero

Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

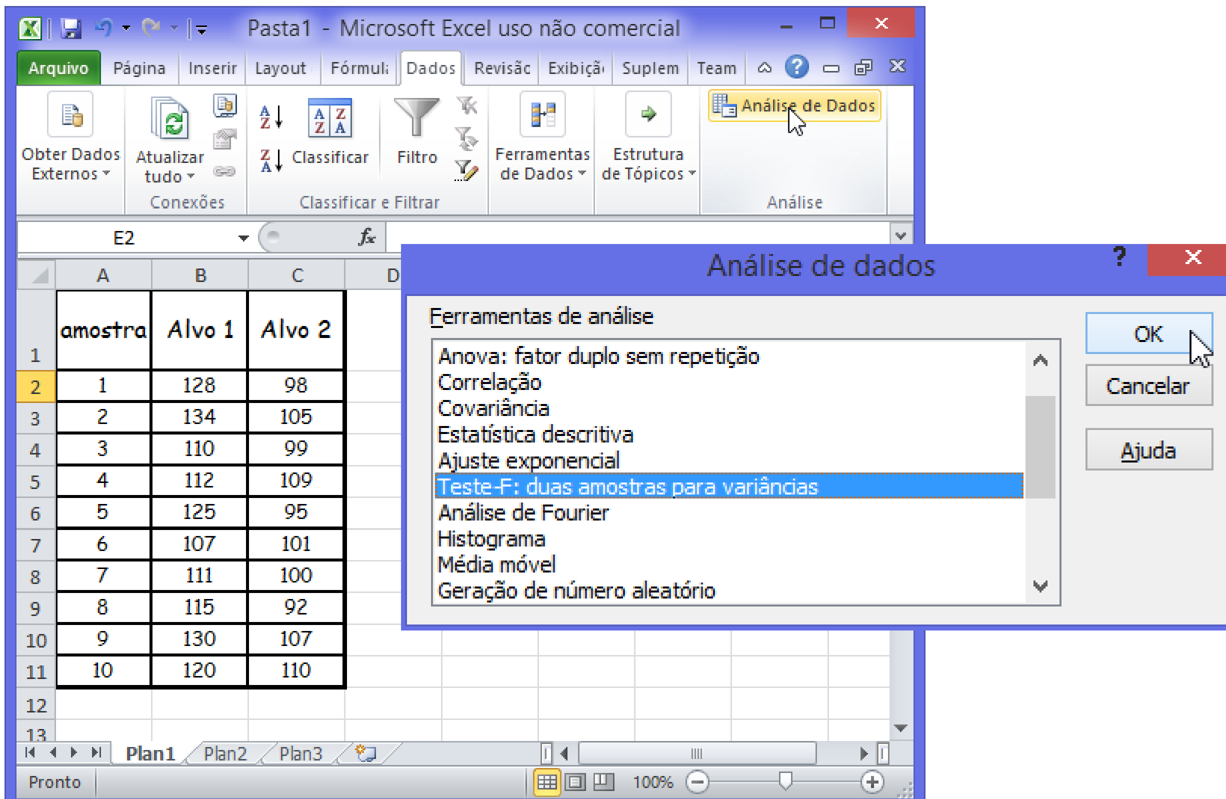
amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110

Comparação de duas médias: teste-t
Mas qual? Homo ou heterocedástico?

Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

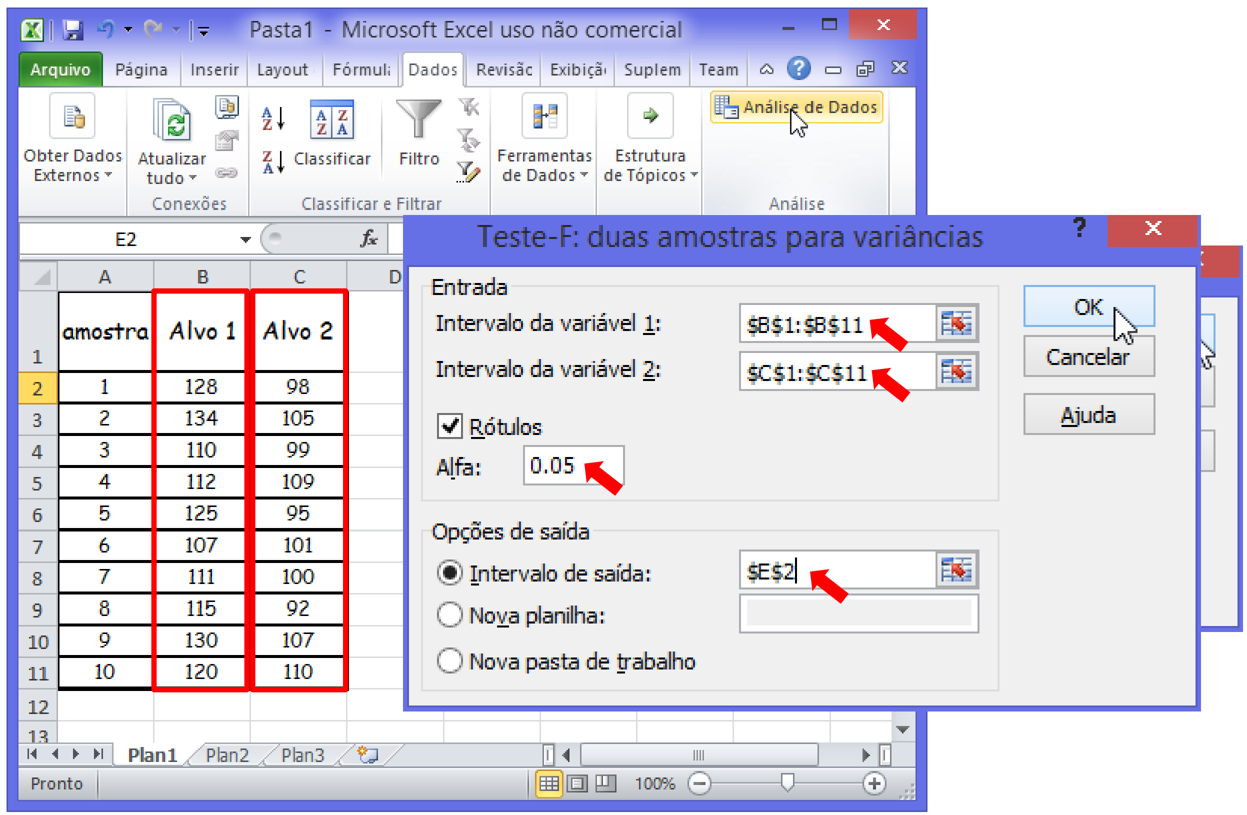
amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110



Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110



Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110

Teste-F: duas amostras para variâncias

	Alvo 1	*Alvo 2*
Média	119,2	101,6
Variância	90,84444	36,04444
Observações	10	10
gl	9	9
F	2,520345	
P(F<=f) uni-caudal	0,092349	
F crítico uni-caudal	3,178893	

$$H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$$

$$H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1$$

Para teste bilateral multiplicar por 2

Conclusão: através do teste-F, pode-se concluir que não há razões para discordar que as variâncias sejam iguais para os alvos 1 e 2, adotando-se um nível de significância de 5%, uma vez que valor-P foi maior que 0,05 (valor-P bilateral = 0,185).

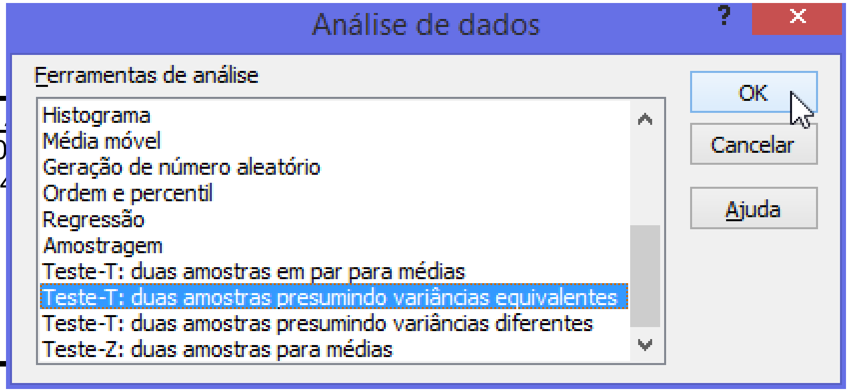
Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110

Teste-F: duas amostras para variâncias

	Alvo 1	*Alvo*
Média	119,2	10
Variância	90,84444	36,04
Observações	10	
gl	9	
F	2,520345	
P(F<=f) uni-caudal	0,092349	
F crítico uni-caudal	3,178893	



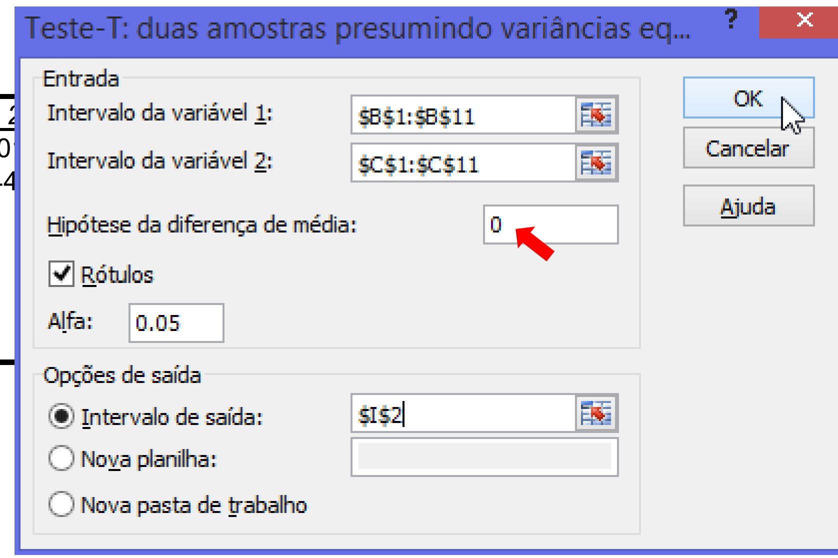
Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110

Teste-F: duas amostras para variâncias

	Alvo 1	*Alvo 2*
Média	119,2	10
Variância	90,84444	36,044
Observações	10	
gl	9	
F	2,520345	
P(F<=f) uni-caudal	0,092349	
F crítico uni-caudal	3,178893	



Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110

Teste-F: duas amostras para variâncias

	Alvo 1	*Alvo 2*
Média	119,2	101,6
Variância	90,84444	36,04444
Observações	10	10
gl	9	9
F	2,520345	
P(F<=f) uni-caudal	0,092349	
F crítico uni-caudal	3,178893	

Teste-t: duas amostras presumindo variâncias equivalentes

	Alvo 1	*Alvo 2*
Média	119,2	101,6
Variância	90,84444	36,04444
Observações	10	10
Variância agrupada	63,44444	
Hipótese da diferença de média	0	
gl	18	
Stat t	4,940841	
P(T<=t) uni-caudal	5,28E-05	
t crítico uni-caudal	1,734064	
P(T<=t) bi-caudal	0,000106	
t crítico bi-caudal	2,100922	

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

Conclusão: através do teste-t homocedástico (bilateral), pode-se concluir que as médias dos alvos 1 e 2 são diferentes, adotando-se um nível de significância de 5%, uma vez que valor-P foi menor que 0,05 (valor-P bilateral = 0,000106).

Teste de Hipótese / EXCEL

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110

Teste-F: duas amostras para variâncias

	Alvo 1	*Alvo 2*
Média	119,2	101,6
Variância	90,84444	36,04444
Observações	10	10
gl	9	9
F	2,520345	
P(F<=f) uni-caudal	0,092349	
F crítico uni-caudal	3,178893	

Teste-t: duas amostras presumindo variâncias equivalentes

	Alvo 1	*Alvo 2*
Média	119,2	101,6
Variância	90,84444	36,04444
Observações	10	10
Variância agrupada	63,44444	
Hipótese da diferença de média	0	
gl	18	
Stat t	4,940841	
P(T<=t) uni-caudal	5,28E-05	
t crítico uni-caudal	1,734064	
P(T<=t) bi-caudal	0,000106	
t crítico bi-caudal	2,100922	

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Conclusão: através do teste-t homocedástico unilateral, pode-se concluir que a média do alvo 1 deve ser maior que a do alvo 2, adotando-se um nível de significância de 5%, uma vez que valor-P foi menor que 0,05 (valor-P = 0,0000528).

Teste de Hipótese / R

Exemplo:
Para se comparar a resposta espectral de 2 alvos, 10 pixels são escolhidos aleatoriamente de cada alvo, cujos resultados são apresentados abaixo. Adotando um nível de significância de 5%, podemos concluir que, em média, os alvos apresentam a mesma resposta?

amostra	Alvo 1	Alvo 2
1	128	98
2	134	105
3	110	99
4	112	109
5	125	95
6	107	101
7	111	100
8	115	92
9	130	107
10	120	110

```
> a1<-c(128,134,110,112,125,107,111,115,130,120)
> a2<-c(98,105,99,109,95,101,100,92,107,110)
> var.test(a1,a2)

F test to compare two variances
data:  a1 and a2
F = 2.5203, num df = 9, denom df = 9, p-value = 0.1847
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
```

Aceito H_0

$H_0: \sigma_1 / \sigma_2 = 1$

$H_1: \sigma_1 / \sigma_2 \neq 1$

```
> mean(a1)
[1] 119.2
> mean(a2)
[1] 101.6
```

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$

Rejeito H_0

```
> t.test(a1,a2,var.equal=T,alternative="greater")

Two Sample t-test
data:  a1 and a2
t = 4.9408, df = 18, p-value = 5.277e-05
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
```

Conclusão: a média do alvo 1 é significativamente (5%) maior que a média do alvo 2.

Pressuposição de Normalidade dos Dados

Como foi visto, algumas distribuições usadas para a construção de Intervalos de Confiança e Testes de Hipótese têm sua origem fundamentada na condição de que as populações sejam normalmente distribuídas.

$X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ amostra aleatória $\Rightarrow X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$	$\dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$	$\dfrac{s_1^2\sigma_2^2}{s_2^2\sigma_1^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$

Mas como a falta de normalidade dos dados pode afetar os resultados?

Para entender o papel da normalidade nos testes de hipóteses, vamos simular amostragens de diferentes tamanhos em populações com e sem normalidade e avaliar os impactos sobre as conclusões de testes de hipóteses para μ e σ^2.

Testes de Hipótese para μ e σ^2

Foram realizadas 10000 simulações de amostras com tamanho n = 5, 10 e 50 considerando as distribuições:

$X_1 \sim \text{N}(\mu = 10,\ \sigma^2 = 100)$
$X_2 \sim \text{Uniforme}(\text{a} = -7{,}32;\ \text{b} = 27{,}32)$ $\quad \mu = 10 \quad \sigma^2 = 100$
$X_3 \sim \text{Exponencial}(\lambda = 0{,}1)$ $\quad \mu = 10 \quad \sigma^2 = 100$

Para cada amostra, foram calculadas a média e a variância amostrais e as respectivas estatísticas t e χ^2 usadas para testar as hipóteses considerando α = 5%:

$\text{H}_0\text{: } \mu = 10$
$\text{H}_1\text{: } \mu \neq 10$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$\text{H}_0\text{: } \sigma^2 = 100$
$\text{H}_1\text{: } \sigma^2 \neq 100$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

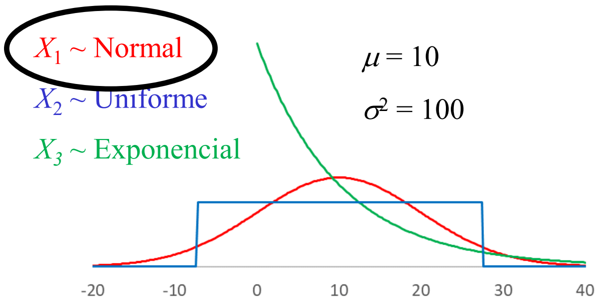
A distribuição dos valores simulados foram comparados aos valores da distribuição teórica esperada através de suas funções acumuladas.

Em seguida, contabilizou-se a frequência com que as hipóteses nulas foram rejeitadas indevidamente, o que deveria corresponder, em teoria, ao valor de significância α.

(SimulacaoTesteHip.xlsx)

Testes de Hipótese para μ e σ^2

Distribuições Simuladas:



Normal

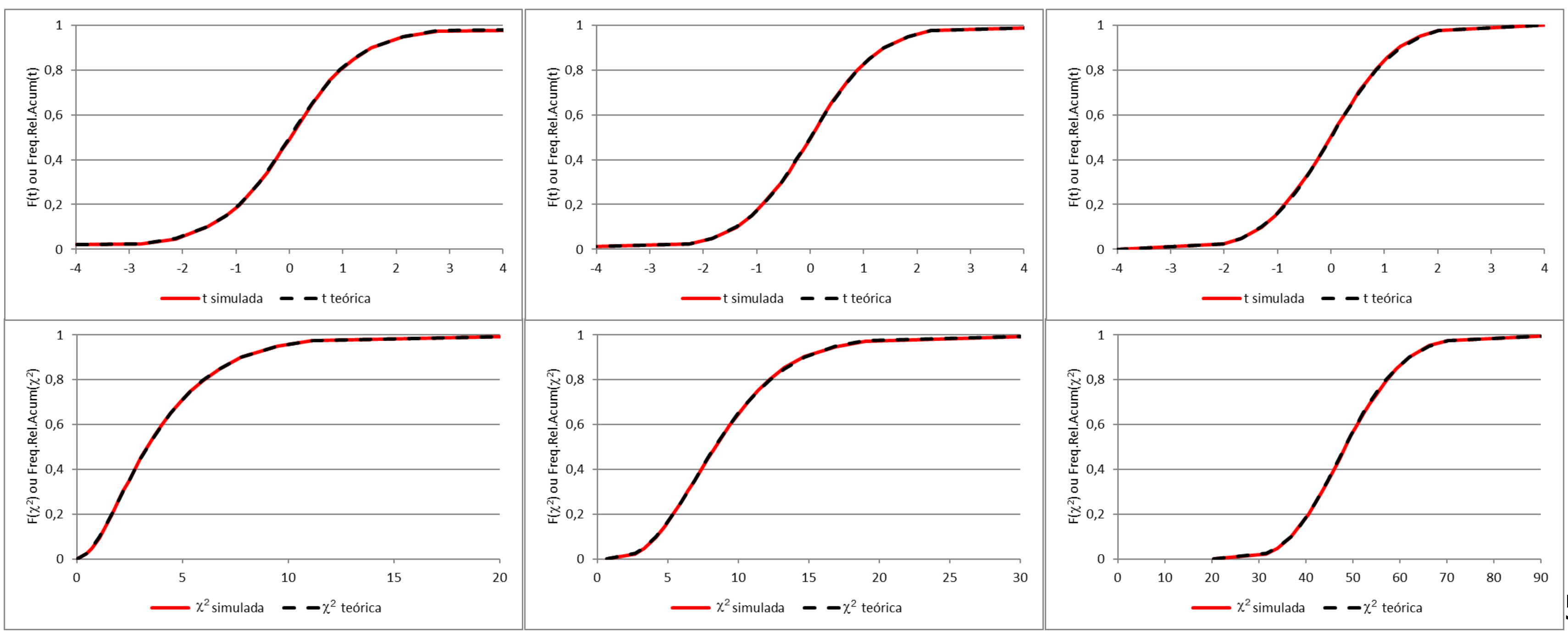
	Proporção de H_0 falsa ($\hat{\alpha}$)		
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 50$
H_0: $\mu = 10$	5,2%	4,7%	4,6%
H_0: $\sigma^2 = 100$	4,9%	5,1%	4,5%

α = P(rejeitar indevidamente H_0) = 5%

$n = 5$ $\quad$ $n = 10$ $\quad$ $n = 50$

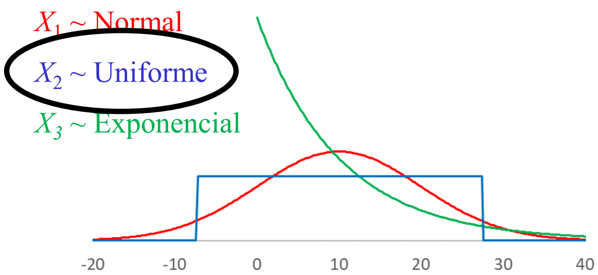
$$t = \frac{\bar{X}_1 - \mu}{\frac{s_1}{\sqrt{n}}}$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s_1^2}{\sigma^2}$$



Testes de Hipótese para μ e σ^2

Distribuições Simuladas:



Uniforme

	Proporção de H_0 falsa ($\hat{\alpha}$)		
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 50$
H_0: $\mu = 10$	6,4%	5,5%	5,2%
H_0: $\sigma^2 = 100$	1,4%	0,8%	0,3%

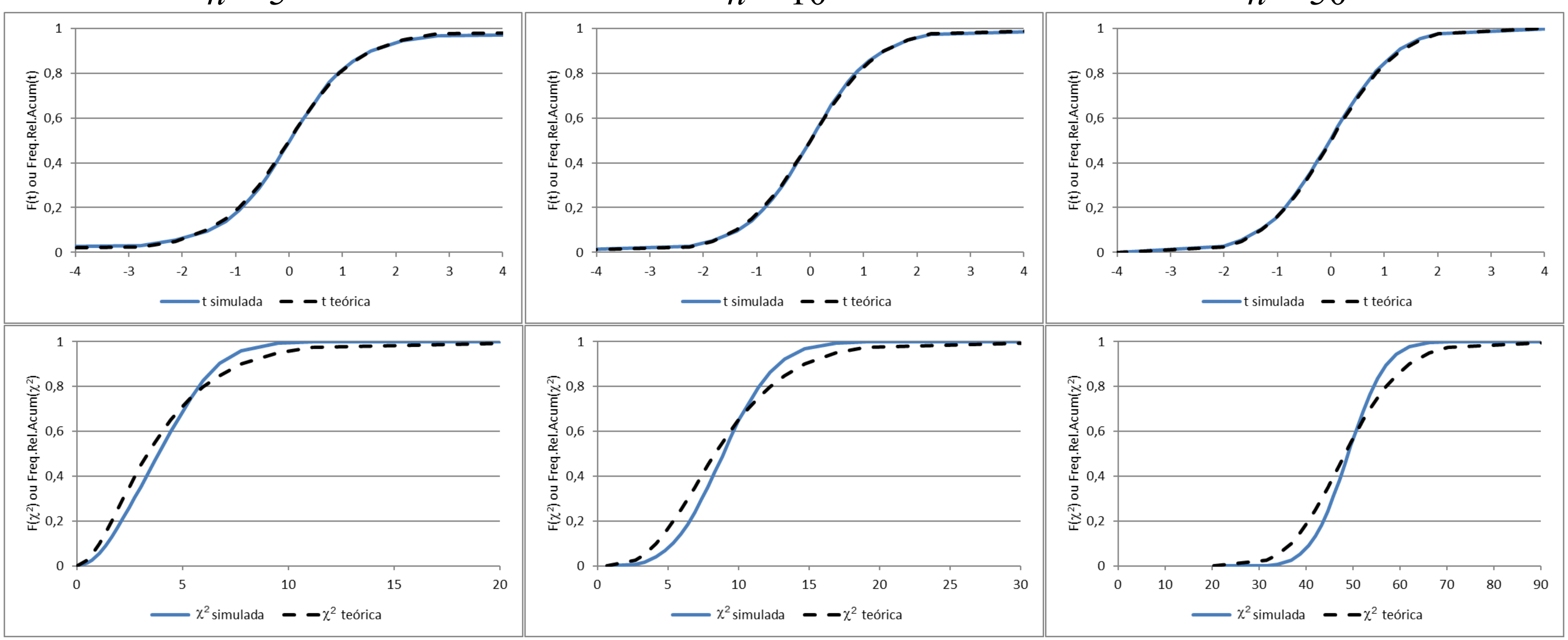
$\Rightarrow$ Aceita mais!

$\alpha = \text{P}(\text{rejeitar indevidamente } \text{H}_0) = 5\%$

$n = 5$ $\quad$ $n = 10$ $\quad$ $n = 50$

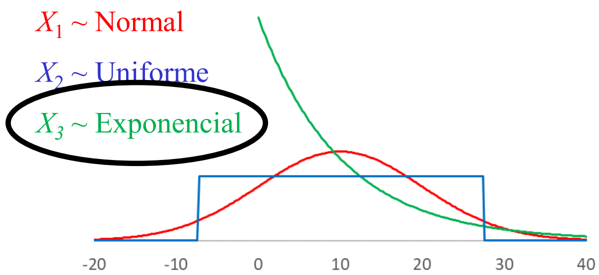
$t = \dfrac{\bar{X}_2 - \mu}{\frac{s_2}{\sqrt{n}}}$

$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s_2^2}{\sigma^2}$



Testes de Hipótese para μ e σ^2

Distribuições Simuladas:



Exponencial

	Proporção de H_0 falsa ($\hat{\alpha}$)			
	$n = 5$	$n = 10$	$n = 50$	
H_0: $\mu = 10$	11,5%	9,7%	6,0%	$\Rightarrow$ Rejeita mais!
H_0: $\sigma^2 = 100$	17,6%	23,5%	29,3%	$\Rightarrow$ Rejeita mais!

$\alpha = P$(rejeitar indevidamente H_0) $= 5\%$

$n = 5$ $\qquad$ $n = 10$ $\qquad$ $n = 50$

$t = \dfrac{\bar{X}_3 - \mu}{\frac{s_3}{\sqrt{n}}}$

$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s_3^2}{\sigma^2}$