
Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204

Intervalo de Confiança
(Extra)

Camilo Daleles Rennó

camilo.renno@inpe.br

acesso do conteúdo do curso em [Bibdigital do INPE](#) ou [GitHub](#)

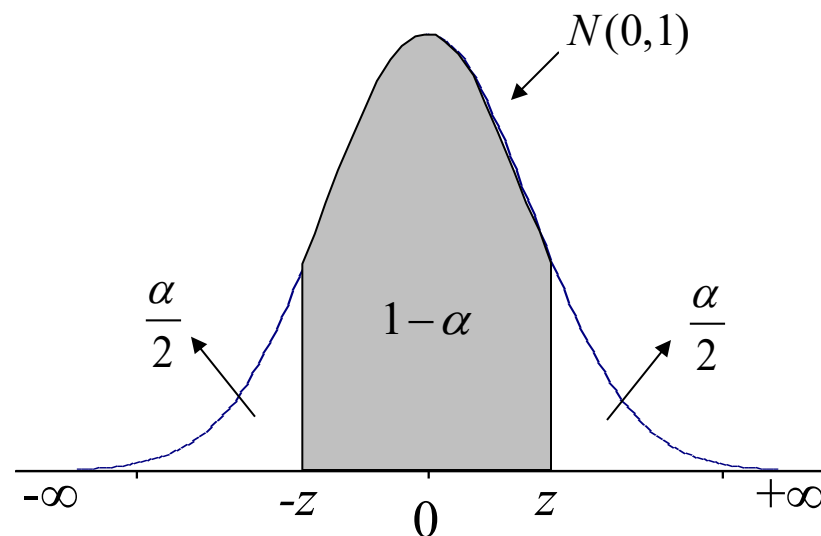
Intervalo de Confiança para $\mu_1 - \mu_2$

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \mu_i \text{ desconhecidas, mas } \sigma_i^2 \text{ conhecidas}$$

$$\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \quad \bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}) \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$P(-z < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z) = 1 - \alpha$$



$$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + z\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}) = 1 - \alpha$$

IC para $\mu_1 - \mu_2$

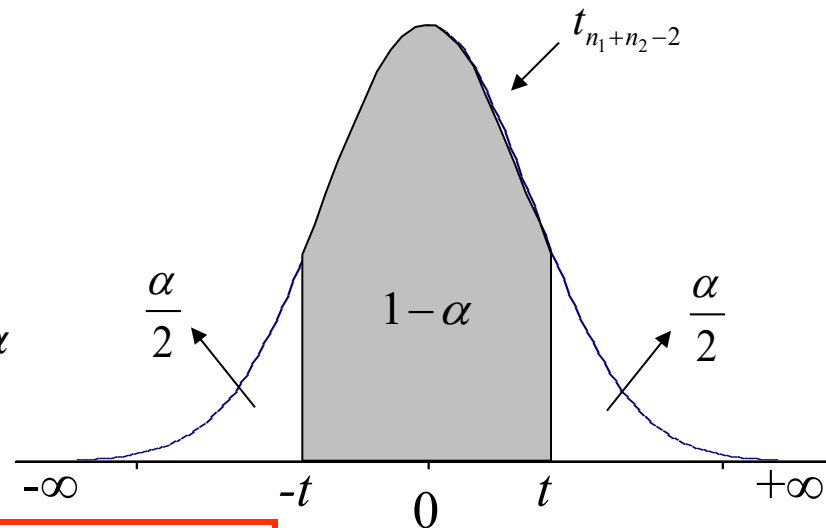
Intervalo de Confiança para $\mu_1 - \mu_2$

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \mu_i \text{ e } \sigma_i^2 \text{ desconhecidas}$$

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}^2$$

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

$$P(-t < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t) = 1 - \alpha$$



$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \dots) = 1 - \alpha$$

$$P(-t < T < t) = 1 - \alpha$$

IC para $\mu_1 - \mu_2$ (atenção: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ t homocedástico)

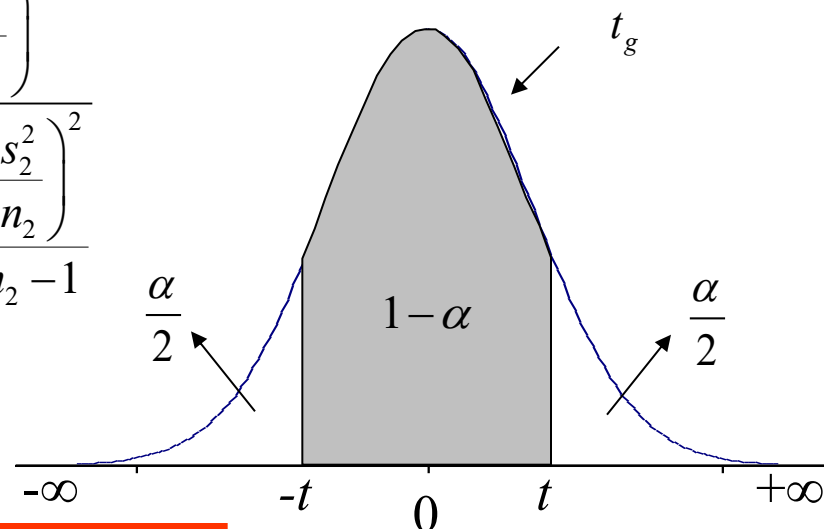
Intervalo de Confiança para $\mu_1 - \mu_2$

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \mu_i \text{ e } \sigma_i^2 \text{ desconhecidas}$$

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad (\text{considerando } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$$

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_g \quad g \approx \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

$$P(-t < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} < t) = 1 - \alpha$$



$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}) = 1 - \alpha$$

$$P(-t < T < t) = 1 - \alpha$$

IC para $\mu_1 - \mu_2$ (atenção: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ t heterocedástico)

Intervalo de Confiança para σ_1^2 / σ_2^2

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ μ_i e σ_i^2 desconhecidas

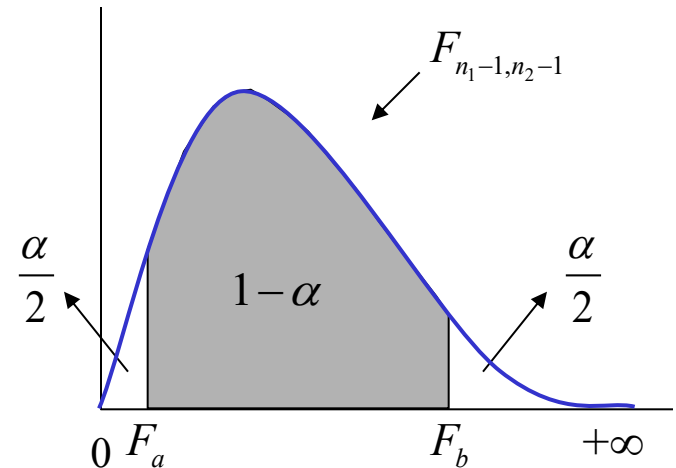
$$F \left(\frac{s_1^2 \sigma_2^2}{s_2^2 \sigma_1^2} \right) \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

$$P(F_a < \frac{s_1^2 \sigma_2^2}{s_2^2 \sigma_1^2} < F_b) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{1}{F_b} < \frac{s_2^2 \sigma_1^2}{s_1^2 \sigma_2^2} < \frac{1}{F_a}) = 1 - \alpha$$

$$P(\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_b} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_a}) = 1 - \alpha$$

IC para σ_1^2 / σ_2^2



$$P(F_a < F < F_b) = 1 - \alpha$$

OBS: por exemplo, se $1 - \alpha = 95\%$

$$F_a \rightarrow F_{0,975; n_1-1; n_2-1} \Rightarrow \frac{1}{F_a} \rightarrow F_{0,025; n_2-1; n_1-1}$$

$$F_b \rightarrow F_{0,025; n_1-1; n_2-1}$$

IC para $\mu_1 - \mu_2$ e σ_1^2 / σ_2^2

Exemplo: duas v.a. quaisquer têm distribuições desconhecidas com médias e variâncias também desconhecidas. Retira-se uma amostra de cada população e calcula-se a média e a variância para cada amostra. Construa um IC de 95% para a razão entre variâncias e para a diferença entre médias supondo que

$$n_1 = 26 \quad \bar{X}_1 = 10,3 \quad s_1^2 = 2,34$$

$$n_2 = 41 \quad \bar{X}_2 = 15,7 \quad s_2^2 = 1,91$$

IC para σ_1^2 / σ_2^2

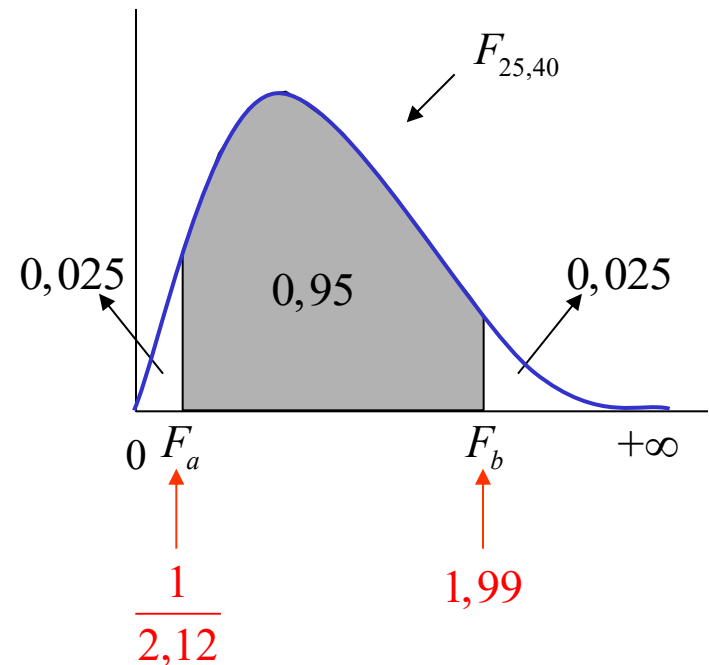
$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_b} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_a}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{2,34}{1,91} \frac{1}{1,99} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{2,34}{1,91} 2,12\right) = 0,95$$

$$P(0,615 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2,597) = 0,95$$

As variâncias podem ser iguais?

R: não há razão para discordar disso. $\Rightarrow$ pode-se fazer o IC para $\mu_1 - \mu_2$ (homocedástico)



IC para $\mu_1 - \mu_2$ e σ_1^2 / σ_2^2

Exemplo: duas v.a. quaisquer têm distribuições desconhecidas com médias e variâncias também desconhecidas. Retira-se uma amostra de cada população e calcula-se a média e a variância para cada amostra. Construa um IC de 95% para a razão entre variâncias e para a diferença entre médias supondo que

$$n_1 = 26 \quad \bar{X}_1 = 10,3 \quad s_1^2 = 2,34$$

$$n_2 = 41 \quad \bar{X}_2 = 15,7 \quad s_2^2 = 1,91$$

IC para $\mu_1 - \mu_2$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - tK < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + tK) = 0,95$$

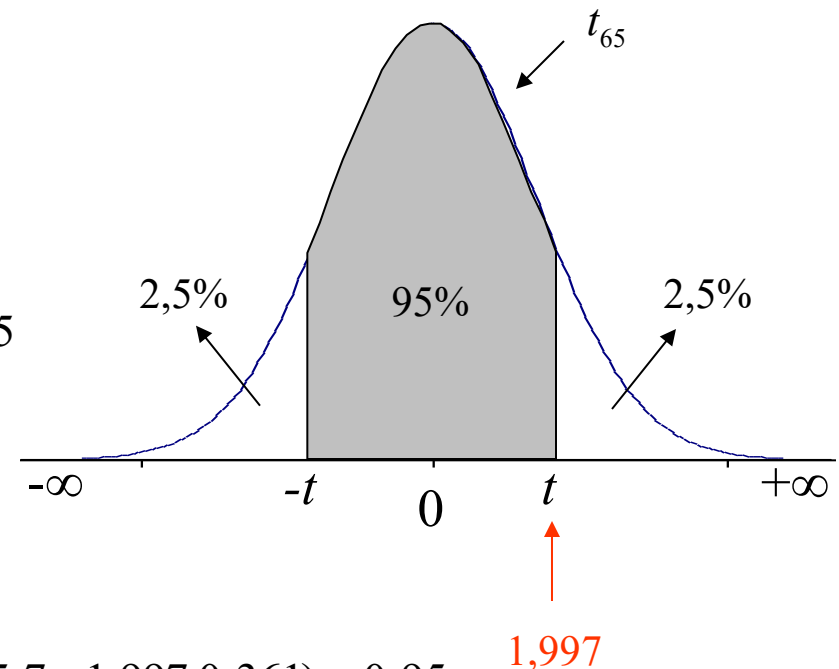
$$K = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$K = \sqrt{\frac{25 \cdot 2,34 + 40 \cdot 1,91}{65}} \sqrt{\frac{1}{26} + \frac{1}{41}} = 0,361$$

$$P(10,3 - 15,7 - 1,997 \cdot 0,361 < \mu_1 - \mu_2 < 10,3 - 15,7 + 1,997 \cdot 0,361) = 0,95$$

$$P(-6,121 < \mu_1 - \mu_2 < -4,679) = 0,95$$

$$\mu_1 = \mu_2? \quad \Rightarrow \quad \mu_1 < \mu_2$$

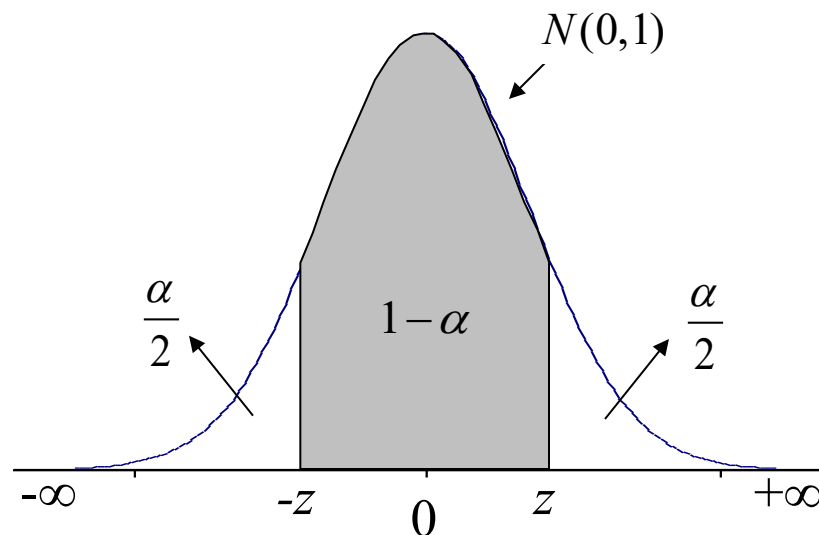


Intervalo de Confiança para $p_1 - p_2$

$$\hat{p}_1 \sim N(p_1, \frac{p_1 q_1}{n_1}) \quad \hat{p}_2 \sim N(p_2, \frac{p_2 q_2}{n_2}) \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N(p_1 - p_2, \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2})$$

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$P(-z < \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} < z) = 1 - \alpha$$



$$P(-z < Z < z) = 1 - \alpha$$

$$P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} < p_1 - p_2 < \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}) = 1 - \alpha$$

IC para $p_1 - p_2$

Intervalos de Confiança (Resumo)

$$\text{para } \mu \begin{cases} N(0,1) & \text{se } \sigma^2 \text{ é conhecida} \\ t_{n-1} & \text{se } \sigma^2 \text{ é desconhecida} \end{cases}$$

$$\text{para } \sigma^2 \begin{cases} \chi_{n-1}^2 \end{cases}$$

$$\text{para } \mu_1 - \mu_2 \begin{cases} N(0,1) & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são conhecidas} \\ t_{n_1+n_2-2} & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são desconhecidas, mas } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ t_g & \text{se } \sigma_1^2 \text{ e } \sigma_2^2 \text{ são desconhecidas, mas } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\text{para } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \begin{cases} F_{n_1-1, n_2-1} \end{cases}$$

$$\text{para } p \begin{cases} N(0,1) \end{cases}$$

$$\text{para } p_1 - p_2 \begin{cases} N(0,1) \end{cases}$$