Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204

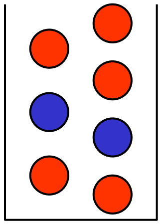
Distribuições de Probabilidade

Camilo Daleles Rennó
camilo.renno@inpe.br

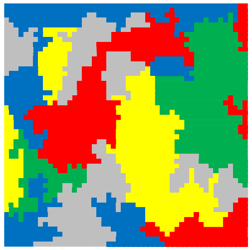
acesso do conteúdo do curso em Bibdigital do INPE ou GitHub

Distribuições de Probabilidade

Considere os seguintes experimentos:



Retiram-se 3 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.



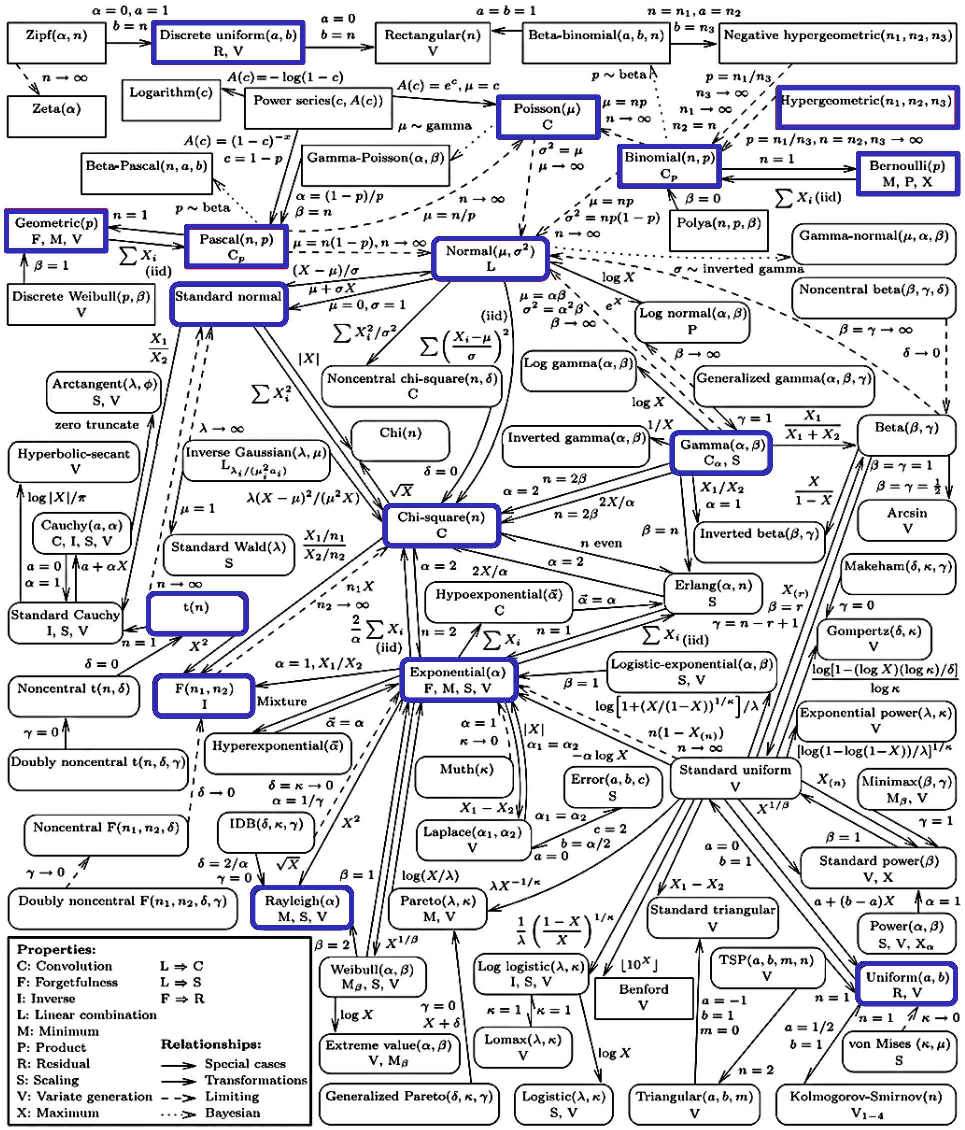
A partir de um mapa, 10 pontos são sorteados aleatoriamente (com reposição). Define-se uma v.a. Y cujos valores representam o número total de pontos pertencentes à classe floresta dentre os 10 escolhidos.

O que esses dois experimentos têm em comum?

- Um número fixo de elementos são escolhidos
- A escolha de um elemento não influencia a escolha do próximo (eventos independentes)
- Cada elemento escolhido pertence ou não ao atributo (cor/classe) de interesse

Dessa forma, pode-se dizer que X e Y têm propriedades semelhantes, ou seja, seguem a mesma distribuição de probabilidade.

Distribuições de Probabilidade



Fonte: Leemis e McQueston (2008)

Quantas funções que descrevem distribuições de v.a. existem?

V.A. Discreta	V.A. Contínua
Uniforme Discreta	Uniforme
Bernoulli	Normal ou Gaussiana
Binomial	t de Student
Geométrica	χ^2
Binomial Negativa ou Pascal	F
Hipergeométrica	Exponencial
Poisson	Rayleigh
	Gamma

O que é importante saber:

- Tipo de v.a. (discreta ou contínua)
- Escopo da v.a. (mínimo e máximo)
- Os parâmetros das distribuições
- A média (medida de tendência central)
- A variância (medida de dispersão)

Distribuição Uniforme Discreta

Considere uma v.a. X cujos valores são inteiros de 1 a N, equiprováveis, ou seja, todos os valores têm igual probabilidade de ocorrência.

Exemplo: Lança-se um dado e define-se uma v.a. X como o valor obtido neste dado.

X: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X = 1) = 1/6$
$P(X = 2) = 1/6$
$P(X = 3) = 1/6$
$P(X = 4) = 1/6$
$P(X = 5) = 1/6$
$P(X = 6) = 1/6$

$$f(x) = \frac{1}{N}$$

$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{N} x P(X = x)$$

$$= \frac{1}{N}$$

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x$$

$$= \frac{N(N+1)}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{\cancel{N}} \frac{\cancel{N}(N+1)}{2}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{N+1}{2}}$$

Distribuição Uniforme Discreta

Considere uma v.a. X cujos valores são inteiros de 1 a N, equiprováveis, ou seja, todos os valores têm igual probabilidade de ocorrência.

Exemplo: Lança-se um dado e define-se uma v.a. X como o valor obtido neste dado.

X: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X = 1) = 1/6$
$P(X = 2) = 1/6$
$P(X = 3) = 1/6$
$P(X = 4) = 1/6$
$P(X = 5) = 1/6$
$P(X = 6) = 1/6$

$$f(x) = \frac{1}{N}$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{N} x^2 \boxed{P(X = x)} = \frac{1}{N}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{N} \boxed{\sum_{x=1}^{N} x^2} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\cancel{N}} \frac{\cancel{N}(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

Distribuição Uniforme Discreta

Considere uma v.a. X cujos valores são inteiros de 1 a N, equiprováveis, ou seja, todos os valores têm igual probabilidade de ocorrência.

Exemplo: Lança-se um dado e define-se uma v.a. X como o valor obtido neste dado.

X: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X = 1) = 1/6$
$P(X = 2) = 1/6$
$P(X = 3) = 1/6$
$P(X = 4) = 1/6$
$P(X = 5) = 1/6$
$P(X = 6) = 1/6$

$$f(x) = \frac{1}{N}$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4}$$

$$Var(X) = (N+1)\left[\frac{(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)}{4}\right]$$

$$Var(X) = (N+1)\left[\frac{4N+2-3N-3}{12}\right]$$

$$Var(X) = (N+1)\frac{(N-1)}{12}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{N^2-1}{12}}$$

Distribuição Uniforme Discreta

Considere uma v.a. X cujos valores são inteiros de 1 a N, equiprováveis, ou seja, todos os valores têm igual probabilidade de ocorrência.

$$X: \{1, 2, \ldots, N\} \qquad f(x) = \frac{1}{N}$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2} \qquad Var(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

Exemplo: Lança-se um dado e define-se uma v.a. X como o valor obtido neste dado.

$$X: \{1, 2, \ldots, 6\} \qquad f(x) = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \boxed{3{,}5} \qquad Var(X) = \frac{36-1}{12} = \boxed{2{,}92}$$

Distribuição Uniforme Discreta

Considere uma v.a. X cujos valores são inteiros de 1 a N, equiprováveis, ou seja, todos os valores têm igual probabilidade de ocorrência.

$$X: \{1, 2, \ldots, N\} \qquad f(x) = \frac{1}{N}$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2} \qquad Var(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

Considere uma v.a. Y cujos valores são inteiros consecutivos de a a b, equiprováveis, ou seja, todos os valores têm igual probabilidade de ocorrência.

$$Y: \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} \qquad f(y) = \frac{1}{b-a+1}$$

$$E(Y) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(Y) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

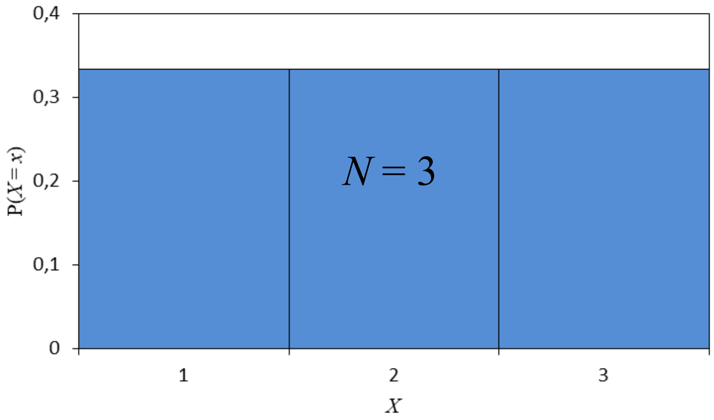
$$\begin{cases} Y = X + a - 1 \\ N = b - a + 1 \end{cases}$$

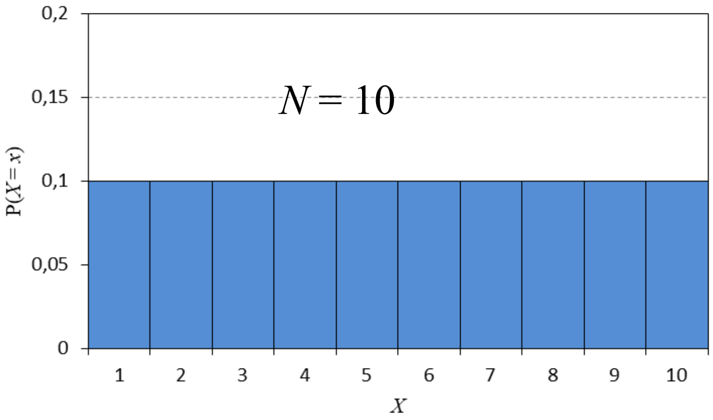
$$E(Y) = E(X + a - 1) = \frac{b-a+2}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}$$

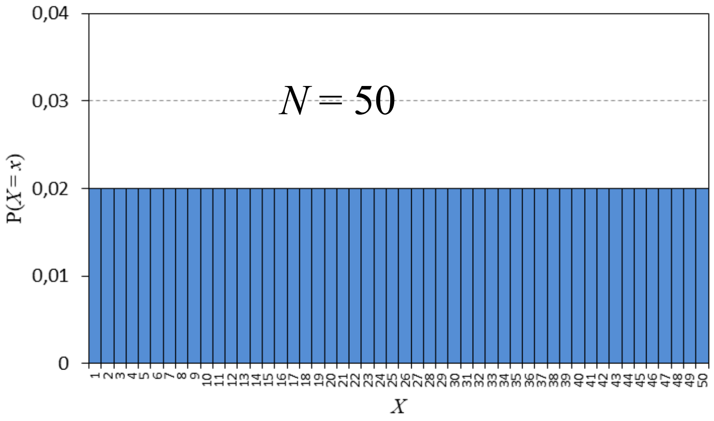
$$Var(Y) = Var(X + a - 1) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

Distribuição Uniforme Discreta

Exemplos







$$E(X) = \frac{N+1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{N^2-1}{12}$$

Em que situação a média e a variância são maiores?

Distribuição Uniforme Discreta

Exemplo: Se uma v.a. Y é representada por valores múltiplos de 4, maiores que 10 e menores que 210, equiprováveis, qual a sua média e variância?
Y representa uma distribuição uniforme discreta típica? Posso usar as fórmulas definidas para essa distribuição?

$$Y: \{12, 16, \ldots, 208\}$$

$$E(Y) = \xcancel{\frac{a+b}{2}}$$

$$Var(Y) = \xcancel{\frac{(b-a+1)^2-1}{12}}$$

Distribuição Uniforme Discreta

Exemplo: Se uma v.a. Y é representada por valores múltiplos de 4, maiores que 10 e menores que 210, equiprováveis, qual a sua média e variância?

Y representa uma distribuição uniforme discreta típica? Posso usar as fórmulas definidas para essa distribuição?

$$Y: \{12, 16, ..., 208\} \quad \overset{?}{\Leftrightarrow} \quad X: \{1, 2, ..., N\}$$

$$Y/4: \{3, 4, ..., 52\}$$

$$Y/4 - 2: \{1, 2, ..., 50\}$$

$$X: \{1, 2, ..., 50\}$$

$$X = Y/4 - 2$$

$$Y = 4X + 8$$

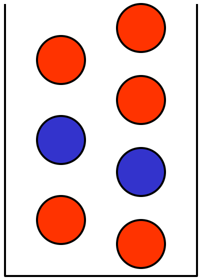
$$E(Y) = 4E(X) + 8 \quad = 4*25,5 + 8 = 110$$

$$Var(Y) = 16Var(X) \quad = 16*208,25 = 3332$$

$$E(X) = \frac{N+1}{2} = \frac{51}{2} = 25,5$$

$$Var(X) = \frac{N^2-1}{12} = \frac{2499}{12} = 208,25$$

Distribuição Binomial



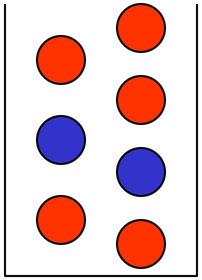
Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

X: $\{0, 1, 2, 3\}$

O experimento envolve 3 eventos independentes.
Para cada evento:

$P(vermelha) = 5/7$ $= p$ (probabilidade de sucesso)
$P(azul) = 2/7$ $= q$ (probabilidade de fracasso, $q = 1 - p$)

Distribuição Binomial



Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

X: $\{0, 1, 2, 3\}$ $p = 5/7$ $q = 2/7$ $n = 3$ (número de bolas retiradas da urna)

$$P(X=0) = \underset{q}{\frac{2}{7}}\,\underset{q}{\frac{2}{7}}\,\underset{q}{\frac{2}{7}} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343}$$

$$P(X=3) = \underset{p}{\frac{5}{7}}\,\underset{p}{\frac{5}{7}}\,\underset{p}{\frac{5}{7}} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}$$

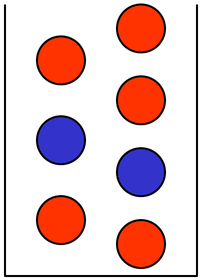
$$P(X=1) = \frac{3!}{1!2!}\,\underset{p}{\frac{5}{7}}\,\underset{q}{\frac{2}{7}}\,\underset{q}{\frac{2}{7}} = 3\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{60}{343}$$

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\;p^x q^{n-x}$$

$$P(X=2) = \frac{3!}{2!1!}\,\underset{p}{\frac{5}{7}}\,\underset{p}{\frac{5}{7}}\,\underset{q}{\frac{2}{7}} = 3\left(\frac{5}{7}\right)^2\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{150}{343}$$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Distribuição Binomial



Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

X: $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

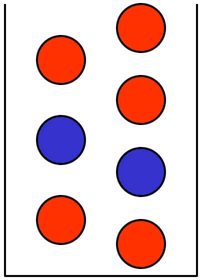
$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

Analisando o caso particular onde $n = 1$:

Bernoulli

Distribuição Bernoulli



Considere o experimento: retira-se uma bola da urna. Define-se uma v.a. X cujos valores são 1 se a bola escolhida for vermelha (sucesso) e 0 caso contrário (fracasso).

X: $\{0, 1\}$

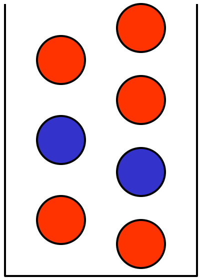
$P(X = 0) = 2/7 = q$ (probabilidade de fracasso, $q = 1 - p$)
$P(X = 1) = 5/7 = p$ (probabilidade de sucesso)

$$f(x) = p^x q^{1-x}$$

$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

Distribuição Bernoulli



Considere o experimento: retira-se uma bola da urna. Define-se uma v.a. X cujos valores são 1 se a bola escolhida for vermelha (sucesso) e 0 caso contrário (fracasso).

X: $\{0, 1\}$

$P(X = 0) = 2/7$
$P(X = 1) = 5/7$

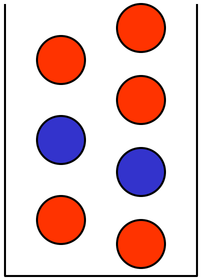
$f(x) = p^x q^{1-x}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} xP(X = x)$$

$$E(X) = 0q + 1p$$

$$\boxed{E(X) = p}$$

Distribuição Bernoulli



Considere o experimento: retira-se uma bola da urna. Define-se uma v.a. X cujos valores são 1 se a bola escolhida for vermelha (sucesso) e 0 caso contrário (fracasso).

X: $\{0, 1\}$

$P(X = 0) = 2/7$
$P(X = 1) = 5/7$

$f(x) = p^x q^{1-x}$

$E(X) = p$

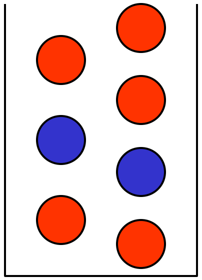
$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 P(X = x)$$

$$E(X^2) = 0^2 q + 1^2 p$$

$$E(X^2) = p$$

Distribuição Bernoulli



Considere o experimento: retira-se uma bola da urna. Define-se uma v.a. X cujos valores são 1 se a bola escolhida for vermelha (sucesso) e 0 caso contrário (fracasso).

X: $\{0, 1\}$

$P(X = 0) = 2/7$
$P(X = 1) = 5/7$

$$f(x) = p^x q^{1-x}$$

$$E(X) = p$$

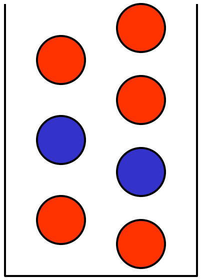
$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = p - p^2$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

$$\boxed{Var(X) = pq}$$

Distribuição Bernoulli



Considere o experimento: retira-se uma bola da urna. Define-se uma v.a. X cujos valores são 1 se a bola escolhida for vermelha (sucesso) e 0 caso contrário (fracasso).

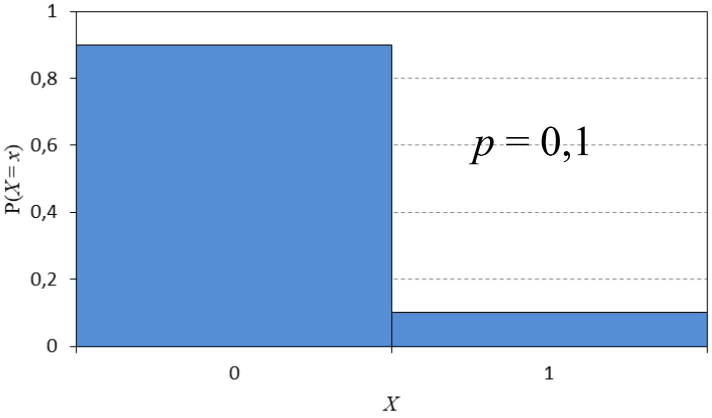
$$f(x) = p^x q^{1-x} = \left(\frac{5}{7}\right)^x \left(\frac{2}{7}\right)^{1-x} \qquad X\colon \{0,\ 1\}$$

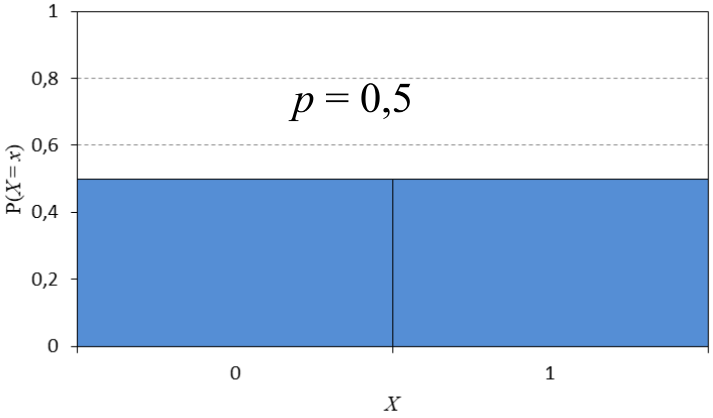
$$E(X) = p = \frac{5}{7} = 0{,}714$$

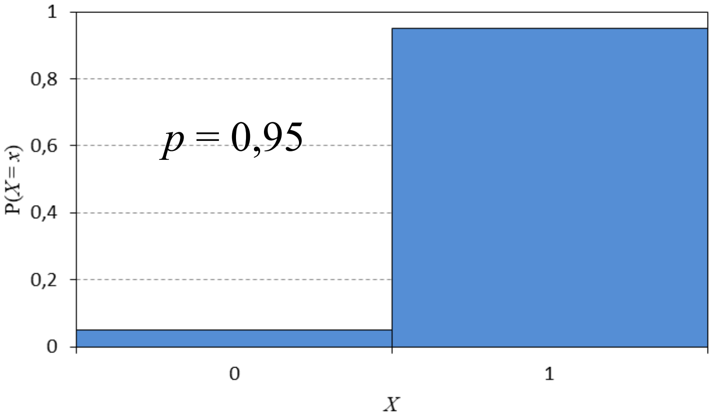
$$Var(X) = pq = \frac{5}{7}\frac{2}{7} = \frac{10}{49} = 0{,}204$$

Distribuição Bernoulli

Exemplos





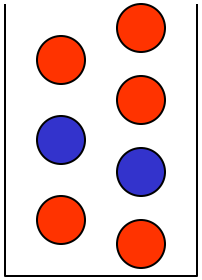


$$E(X) = p$$

$$Var(X) = pq$$

Em que situação a média e a variância são maiores?

Distribuição Binomial



Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

X: $\{0, 1, 2, 3\}$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

A v.a. Binomial pode ser entendida como uma somatória de n v.a. Bernoulli, já que, para cada evento (tirar uma bola), há uma probabilidade p de sucesso (tirar bola vermelha) e q de fracasso (tirar bola azul).

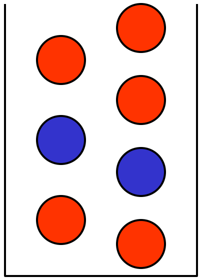
$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ onde cada Y_i tem distribuição Bernoulli (0 ou 1)

Por exemplo: $\overset{Y_1 = 0}{\textcircled{q}} \quad \overset{Y_2 = 1}{\textcircled{p}} \quad \overset{Y_3 = 1}{\textcircled{p}} \quad \Rightarrow X = 2$ (sucessos)

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

Distribuição Binomial



Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

$p = 5/7$
$q = 2/7$
$n = 3$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{3}{x} \left(\frac{5}{7}\right)^x \left(\frac{2}{7}\right)^{3-x}$$

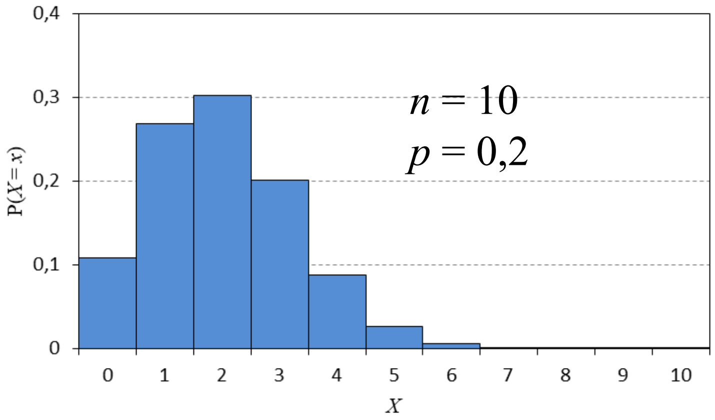
X: {0, 1, 2, 3}

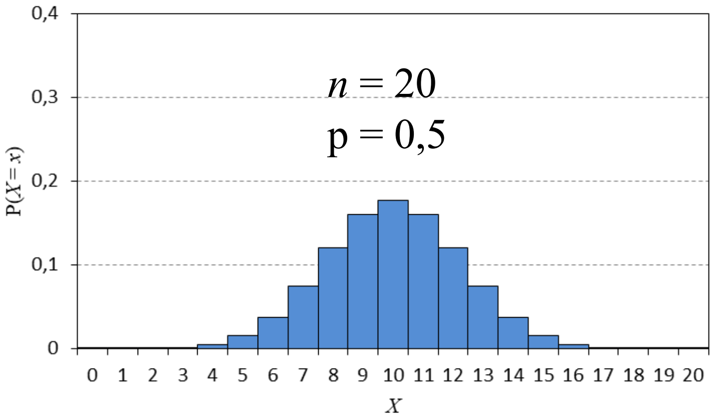
$$E(X) = np = 3\frac{5}{7} = \frac{15}{7} = 2{,}143$$

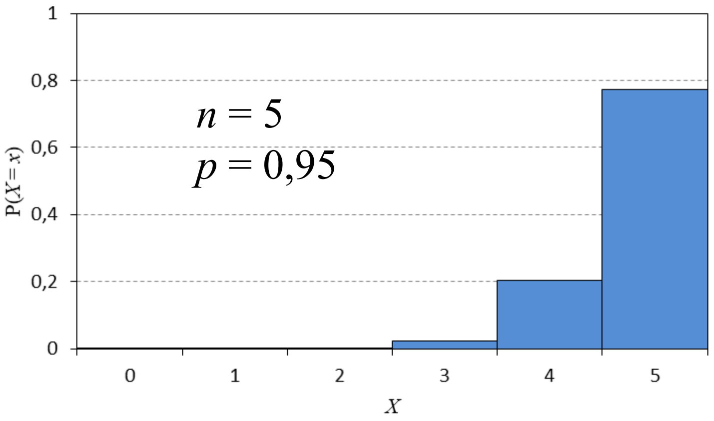
$$Var(X) = npq = 3\frac{5}{7}\frac{2}{7} = \frac{30}{49} = 0{,}612$$

Distribuição Binomial

Exemplos





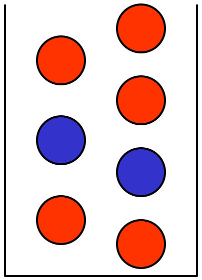


$$E(X) = np$$

$$Var(X) = npq$$

Em que situação a média e a variância são maiores?

Distribuição Binomial



Exemplo: retiram-se 3 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

Qual a probabilidade de se obter 2 ou mais bolas vermelhas?

$p = 5/7$
$q = 2/7$
$n = 3$

X: $\{0, 1, 2, 3\}$

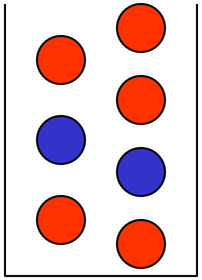
$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^2\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{3!}{2!1!}\frac{25}{49}\frac{2}{7} = \frac{6}{2}\frac{25}{49}\frac{2}{7} = \frac{150}{343}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{5}{7}\right)^3\left(\frac{2}{7}\right)^0 = \frac{125}{343}$$

$$P(X \geq 2) = \frac{150}{343} + \frac{125}{343} = \frac{275}{343} \cong 0,802$$

Distribuição Geométrica



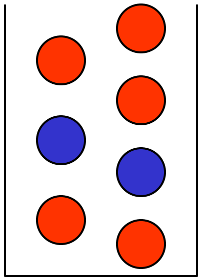
Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga uma bola vermelha. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter uma bola vermelha (sucesso).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$

O experimento envolve de 1 a infinitos eventos independentes.
Para cada evento:

$P(vermelha) = 5/7$ $= p$ (probabilidade de sucesso)
$P(azul) = 2/7$ $= q$ (probabilidade de fracasso, $q = 1 - p$)

Distribuição Geométrica



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga uma bola vermelha. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter uma bola vermelha (sucesso).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$ $\quad p = 5/7 \quad q = 2/7$

$$P(X=0) = \underset{p}{\frac{5}{7}} = 0{,}714$$

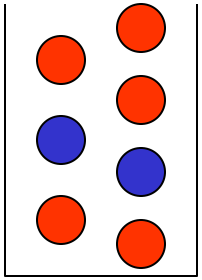
$$P(X=1) = \underset{q\ p}{\frac{2}{7}\frac{5}{7}} = \frac{10}{49} = 0{,}204$$

$$P(X=2) = \underset{q\ q\ p}{\frac{2}{7}\frac{2}{7}\frac{5}{7}} = \left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{20}{343} = 0{,}058$$

$$P(X=3) = \underset{q\ q\ q\ p}{\frac{2}{7}\frac{2}{7}\frac{2}{7}\frac{5}{7}} = \left(\frac{2}{7}\right)^3\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{40}{2401} = 0{,}017$$

$$f(x) = pq^x$$

Distribuição Geométrica



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga uma bola vermelha. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter uma bola vermelha (sucesso).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$

$$f(x) = pq^x$$

$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xP(X = x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xpq^x$$

$$E(X) = pq\sum_{x=1}^{\infty} \boxed{xq^{x-1}} = \frac{dq^x}{dq}$$

$$E(X) = pq\sum_{x=1}^{\infty} \frac{dq^x}{dq}$$

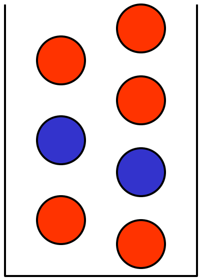
$$E(X) = pq\frac{d}{dq}\boxed{\sum_{x=1}^{\infty} q^x} = \frac{q}{1-q}$$

$$E(X) = pq\boxed{\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)} = \frac{1}{p^2}$$

$$E(X) = \cancel{p}q\frac{1}{p^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{q}{p}}$$

Distribuição Geométrica



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga uma bola vermelha. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter uma bola vermelha (sucesso).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$

$$f(x) = pq^x$$

$$E(X) = \frac{q}{p}$$

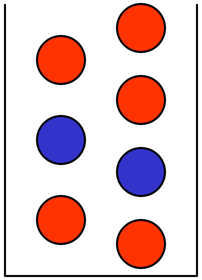
$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(X = x)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 pq^x$$

$$E(X^2) = \frac{q^2 + q}{p^2}$$

Distribuição Geométrica



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga uma bola vermelha. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter uma bola vermelha (sucesso).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$

$$f(x) = pq^x$$

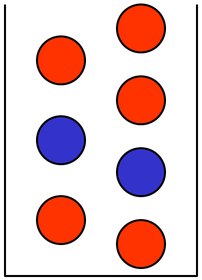
$$E(X) = \frac{q}{p}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = \frac{q^2 + q}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$\boxed{Var(X) = \frac{q}{p^2}}$$

Distribuição Geométrica



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga uma bola vermelha. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter uma bola vermelha (sucesso).

$p = 5/7$
$q = 2/7$

$$f(x) = pq^x = \frac{5}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^x \qquad X: \{0, 1, 2, ..., \infty\}$$

$$E(X) = \frac{q}{p} = \frac{2}{7}\frac{7}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{2}{7}\frac{49}{25} = \frac{14}{25} = 0,56$$

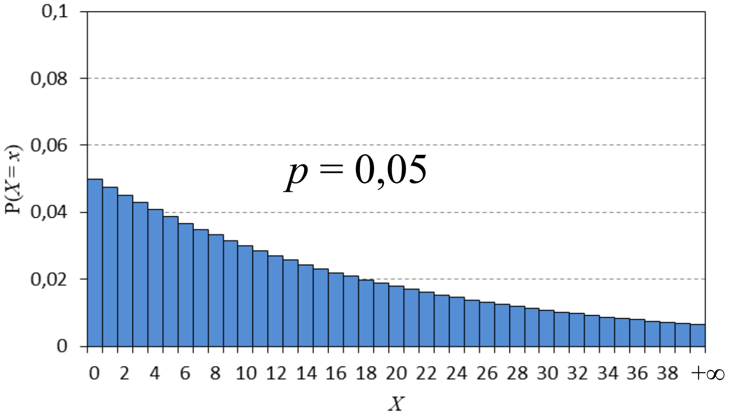
Importante:

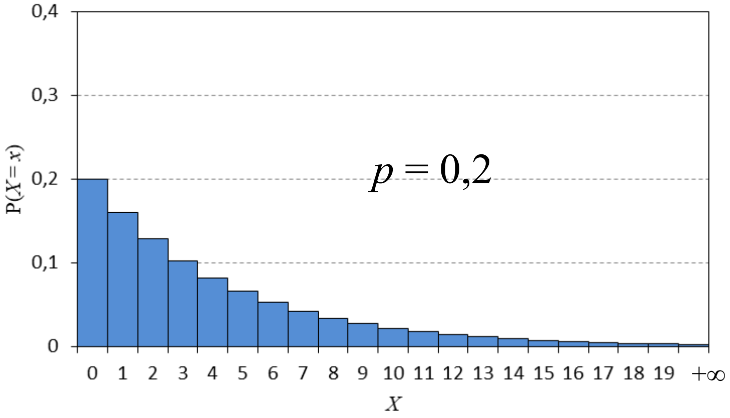
Algumas vezes, esta v.a. refere-se ao número total de tentativas até se conseguir o sucesso. Nesse caso $Y = X + 1$

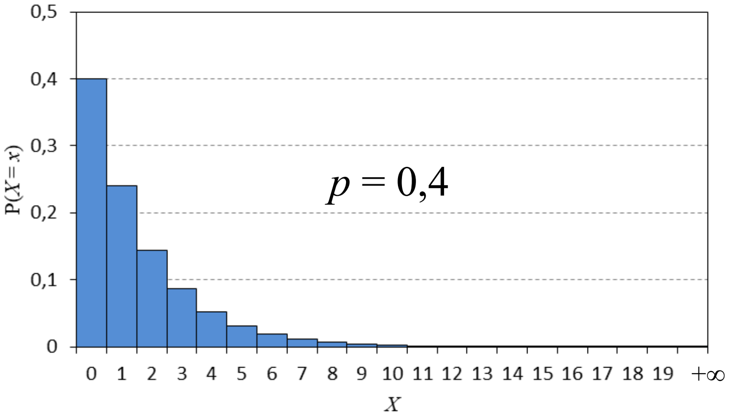
$$Y: \{1, 2, ..., \infty\} \qquad f(y) = pq^{y-1} \qquad E(Y) = \frac{1}{p} \qquad Var(Y) = \frac{q}{p^2}$$

Distribuição Geométrica

Exemplos





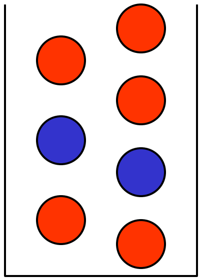


$$E(X) = \frac{q}{p}$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

Em que situação a média e a variância são maiores?

Distribuição Geométrica

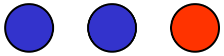


Exemplo: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga uma bola vermelha. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter uma bola vermelha (sucesso).

Qual a probabilidade de se obter a bola vermelha somente na 3ª tentativa?

$p = 5/7$
$q = 2/7$

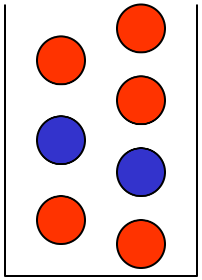
X: $\{0, 1, ..., \infty\}$



← evento desejado: 2 fracassos seguido de 1 sucesso

$$P(X=2) = \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{5}{7}\frac{4}{49} = \frac{20}{343} \cong 0,058$$

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)



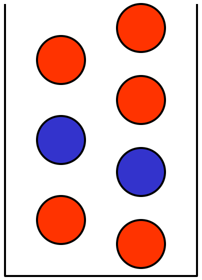
Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga 3 bolas vermelhas. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter as 3 bolas vermelhas (sucessos).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$

O experimento envolve de 3 a infinitos eventos independentes.
Para cada evento:

$P(vermelha) = 5/7 = p$ (probabilidade de sucesso)
$P(azul) = 2/7 = q$ (probabilidade de fracasso, $q = 1 - p$)

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga 3 bolas vermelhas. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter as 3 bolas vermelhas (sucessos).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$ $p = 5/7$ $q = 2/7$ $r = 3$

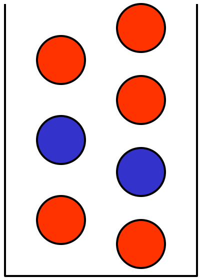
$$P(X=0) = \underbrace{\frac{5}{7}\frac{5}{7}\frac{5}{7}}_{p\,p\,p} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 = 0{,}364$$

$$f(x) = \binom{x+r-1}{x} p^r q^x$$

$$P(X=1) = \frac{3!}{1!2!}\underbrace{\frac{2}{7}\frac{5}{7}\frac{5}{7}\frac{5}{7}}_{q\,p\,p\,p} = 3\frac{2}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^3 = 0{,}312$$

$$P(X=2) = \frac{4!}{2!2!}\underbrace{\frac{2}{7}\frac{2}{7}\frac{5}{7}\frac{5}{7}\frac{5}{7}}_{q\,q\,p\,p\,p} = 6\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{5}{7}\right)^3 = 0{,}178$$

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga 3 bolas vermelhas. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter as 3 bolas vermelhas (sucessos).

X: $\{0, 1, 2, ..., \infty\}$

A v.a. Binomial Negativa pode ser entendida como uma somatória de r v.a. Geométricas.

$X = \sum_{i=1}^{r} Y_i$ onde cada Y_i tem distribuição Geométrica

$$f(x) = \binom{x+r-1}{x} p^r q^x$$

Por exemplo: $\overset{Y_1 = 2}{q\;q\;p}\;\overset{Y_2 = 4}{q\;q\;q\;q\;p}\;\overset{Y_3 = 3}{q\;q\;q\;p} \quad \Rightarrow X = 9$ (fracassos)

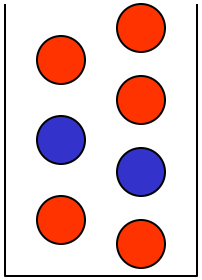
$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{r} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{q}{p} = \frac{rq}{p}$$

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{r} Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \frac{q}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$$

Distribuição Binomial Negativa (Pascal)



Considere o experimento: retiram-se bolas da urna (com reposição), até que se consiga 3 bolas vermelhas. Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas azuis (fracassos) retiradas da urna até obter as 3 bolas vermelhas (sucessos).

$p = 5/7$
$q = 2/7$
$r = 3$

$$f(x) = \binom{x+r-1}{x} p^r q^x = \binom{x+2}{x}\left(\frac{5}{7}\right)^3\left(\frac{2}{7}\right)^x$$

X: $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$

$$E(X) = \frac{rq}{p} = 3\frac{2}{7}\frac{7}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$$Var(X) = \frac{rq}{p^2} = 3\frac{2}{7}\frac{49}{25} = \frac{42}{25} = 1{,}68$$

Importante:

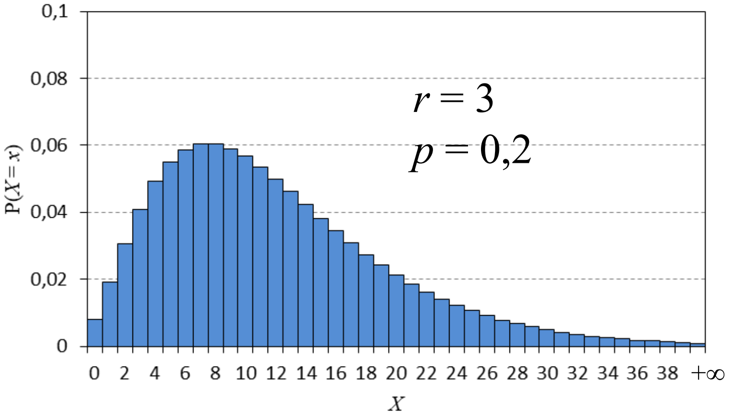
Algumas vezes, esta v.a. refere-se ao número total de tentativas até se conseguir r sucessos. Nesse caso $Y = X + r$

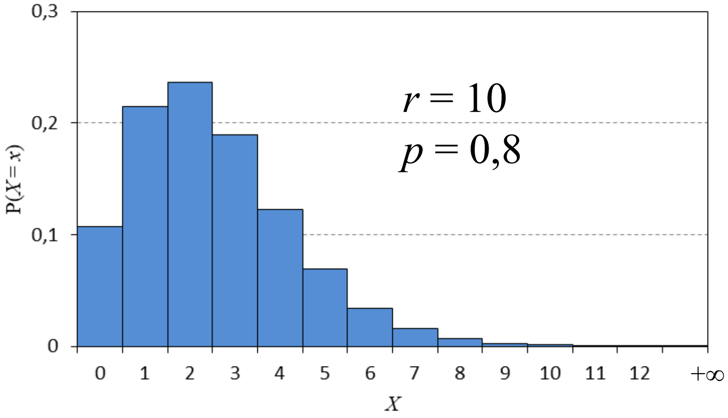
Y: $\{r, r+1, \ldots, \infty\}$

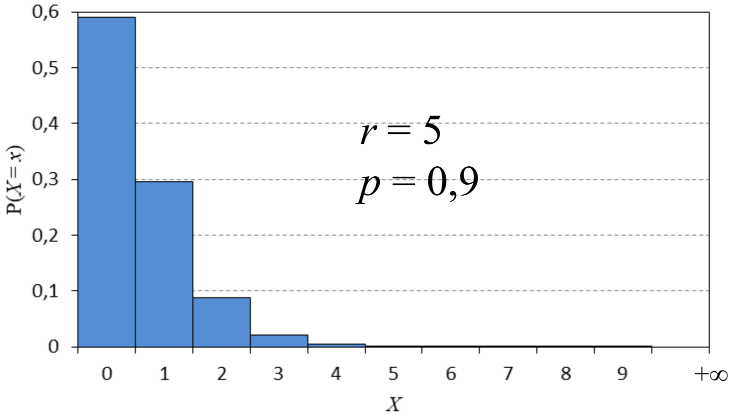
$$f(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r q^{y-r} \qquad E(Y) = \frac{r}{p} \qquad Var(Y) = \frac{rq}{p^2}$$

Distribuição Binomial Negativa

Exemplos





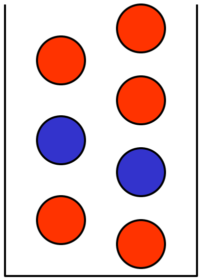


$$E(X) = \frac{rq}{p}$$

$$Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Em que situação a média e a variância são maiores?

Distribuição Hipergeométrica



Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (sem reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

número de bolas retiradas da urna

X: {1, 2, 3}

não é possível obter 3 bolas azuis!

$n = 3$ $M = 7$ $K = 5$ número de bolas vermelhas na urna

número total de bolas na urna

$$P(X=0) = \underset{a}{\frac{2}{7}}\,\underset{a}{\frac{1}{6}}\,\underset{a}{\frac{0}{5}} = 0$$

$$P(X=3) = \underset{v}{\frac{5}{7}}\,\underset{v}{\frac{4}{6}}\,\underset{v}{\frac{3}{5}} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

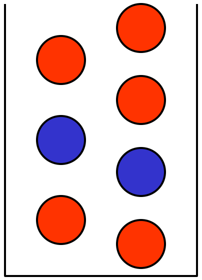
$$P(X=1) = \frac{3!}{1!2!}\,\underset{v}{\frac{5}{7}}\,\underset{a}{\frac{2}{6}}\,\underset{a}{\frac{1}{5}} = 3\,\frac{2}{42} = \frac{1}{7}$$

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\,\frac{\dfrac{K!}{(K-x)!}\,\dfrac{(M-K)!}{[(M-K)-(n-x)]!}}{\dfrac{M!}{(M-n)!}}$$

$$P(X=2) = \frac{3!}{2!1!}\,\underset{v}{\frac{5}{7}}\,\underset{v}{\frac{4}{6}}\,\underset{a}{\frac{2}{5}} = 3\,\frac{8}{42} = \frac{4}{7}$$

$$f(x) = \frac{\begin{pmatrix} K \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M-K \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix}}$$

Distribuição Hipergeométrica



Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (sem reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

X: $\{1, 2, 3\}$

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$$

$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

$$E(X) = n\frac{K}{M}$$

$$Var(X) = n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1}$$

OBS: se M for muito grande:

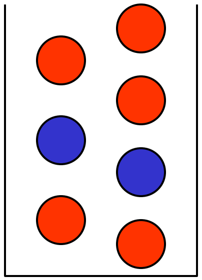
$\frac{K}{M} \to p$ (probabilidade de sucesso)

$\frac{M-K}{M} \to q$ (probabilidade de fracasso)

$\frac{M-n}{M-1} \to 1 \quad \therefore \; E(X) = np \quad Var(X) = npq$

Hipergeométrica → Binomial

Distribuição Hipergeométrica



Considere o experimento: retiram-se 3 bolas da urna (sem reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 3 escolhidas.

$M = 7$
$K = 5$
$n = 3$

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} = \frac{\binom{5}{x}\binom{2}{3-x}}{\binom{7}{3}} \qquad X\text{: } \{1, 2, 3\}$$

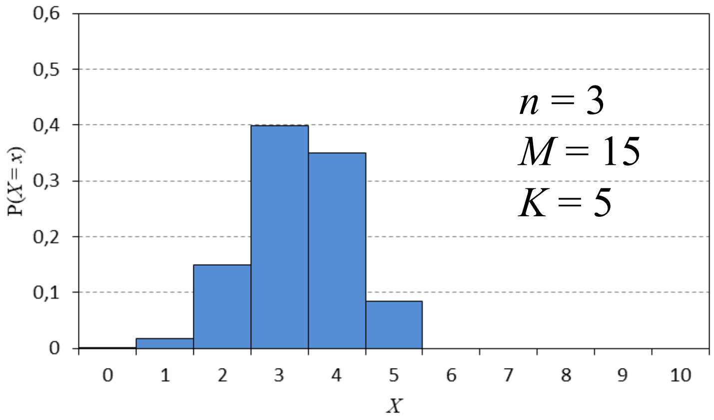
$$E(X) = n\frac{K}{M} = 3\frac{5}{7} = 2{,}143$$ (mesmo que Binomial)

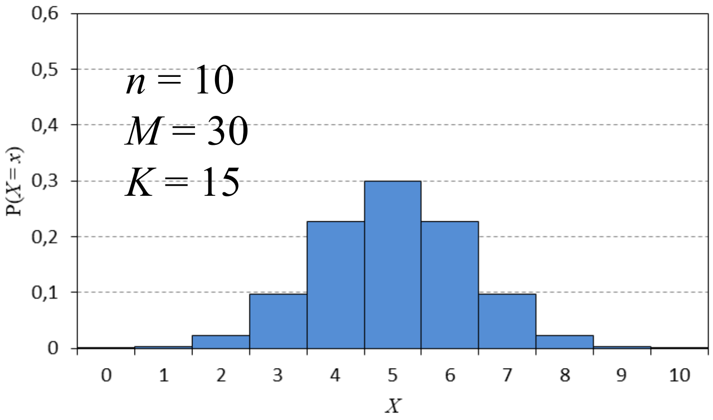
$$Var(X) = n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1} = 3\frac{5}{7}\frac{2}{7}\boxed{\frac{4}{6}} = \frac{120}{294} = 0{,}408$$

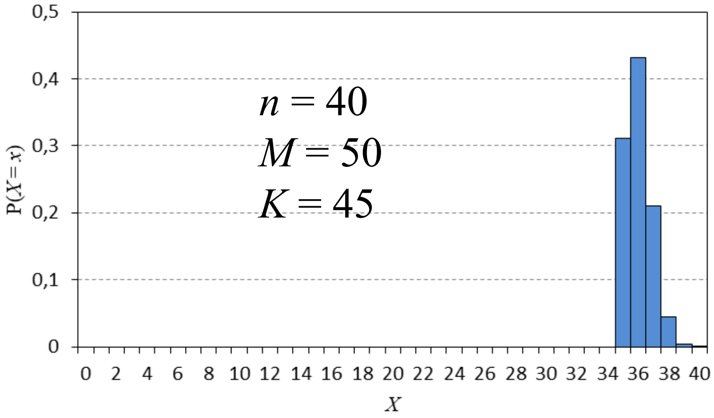
(variância da Binomial * fator de correção)

Distribuição Hipergeométrica

Exemplos







$$E(X) = n\frac{K}{M}$$

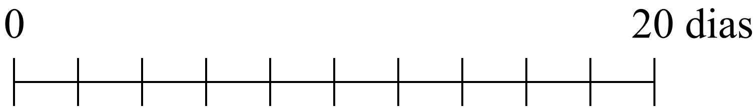
$$Var(X) = n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1}$$

Em que situação a média e a variância são maiores?

Distribuição de Poisson

Suponha que numa série temporal diária de dados de chuva observou-se 10 falhas (dados ausentes) em 100 dias de observação, ou seja, 0,1 falha por dia. Deseja-se calcular a probabilidade de que nos próximos 20 dias ocorram 0, 1, 2, etc falhas.

Considere que a qualquer instante, uma falha é tão provável de ocorrer como em qualquer outro instante e assim, a probabilidade permanece constante.



dividindo arbitrariamente o período em 10 partes...

Pode-se considerar cada intervalo como uma Bernoulli, sendo sucesso obter uma falha e fracasso obter um dado correto. Sendo assim, quanto vale $p = P(\text{sucesso})$?

$E(X) = 0{,}1 * 20 = 2$

(X é o número de falhas ocorridas em 20 dias)

como $n = 10$ e $np = 2$,
então $p = 0{,}2$

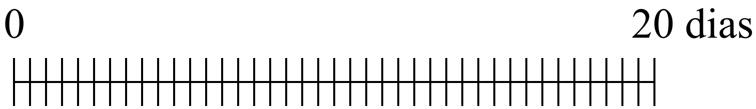
$$f(x) = \binom{10}{x} (0{,}2)^x (0{,}8)^{10-x}$$

Problema: não considera a possibilidade de 2 ou mais falhas dentro do mesmo intervalo!

Distribuição de Poisson

Suponha que numa série temporal diária de dados de chuva observou-se 10 falhas (dados ausentes) em 100 dias de observação, ou seja, 0,1 falha por dia. Deseja-se calcular a probabilidade de que nos próximos 20 dias ocorram 0, 1, 2, etc falhas.

Considere que a qualquer instante, uma falha é tão provável de ocorrer como em qualquer outro instante e assim, a probabilidade permanece constante.



dividindo arbitrariamente o período em 40 partes...

$E(X) = 2$

como $n = 40$ e $np = 2$,
então $p = 0{,}05$

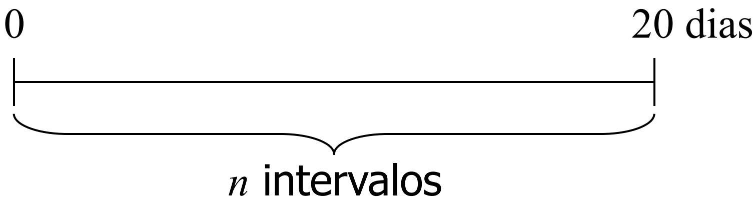
$$f(x) = \binom{40}{x}(0{,}05)^x(0{,}95)^{40-x}$$

Problema: não considera a possibilidade de 2 ou mais falhas dentro do mesmo intervalo!

Distribuição de Poisson

Suponha que numa série temporal diária de dados de chuva observou-se 10 falhas (dados ausentes) em 100 dias de observação, ou seja, 0,1 falha por dia. Deseja-se calcular a probabilidade de que nos próximos 20 dias ocorram 0, 1, 2, etc falhas.

Considere que a qualquer instante, uma falha é tão provável de ocorrer como em qualquer outro instante e assim, a probabilidade permanece constante.



$$E(X) = 2 = \mu = np$$

então

$$p = \frac{\mu}{n}$$

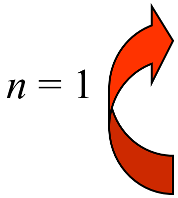
$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{\mu}{n}\right)^x\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

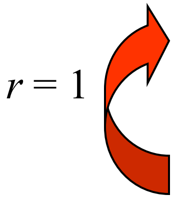
Se $n \rightarrow \infty$, então $p \rightarrow 0$ e $f(x)$ tende para:

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$ (distribuição de Poisson)

$$E(x) = \mu \qquad Var(x) = \mu$$

Resumo Distribuições Discretas



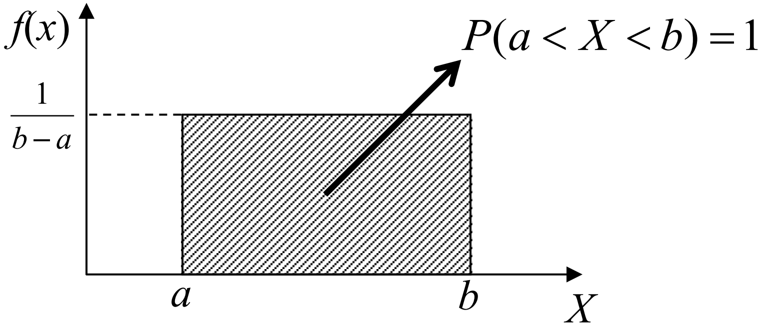


Distribuição	$f(x)$	$E(X)$	$Var(X)$	
Uniforme	$f(x)=\frac{1}{N}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$X=\{1,2,\ldots,N\}$
Bernoulli	$f(x)=p^x q^{1-x}$	p	pq	$X=\{0,1\}$
Binomial	$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$	np	npq	$X=\{0,1,2,\ldots,n\}$
Geométrica	$f(x)=pq^x$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$X=\{0,1,2,\ldots\}$
Binomial Negativa	$f(x)=\binom{x+r-1}{x}p^r q^x$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$X=\{0,1,2,\ldots\}$
Hipergeométrica	$f(x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$	$n\frac{K}{M}$	$n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1}$	$X=\{\max(0,n-M+K),\ldots,\min(n,K)\}$
Poisson	$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$	μ	μ	$X=\{0,1,2,\ldots\}$

Distribuição Uniforme (Contínua)

Uma variável aleatória X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for dada por:

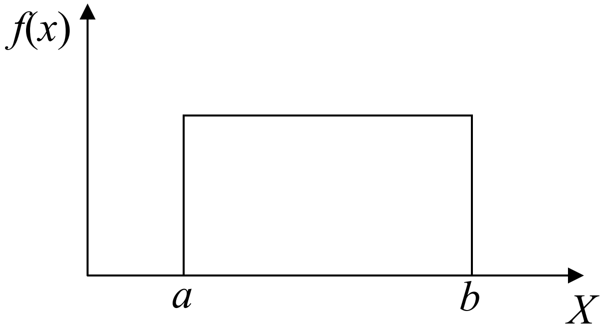
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



$$E(X) = ?$$

$$Var(X) = ?$$

Distribuição Uniforme (Contínua)



$$a \le x \le b$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(X) = ?$$

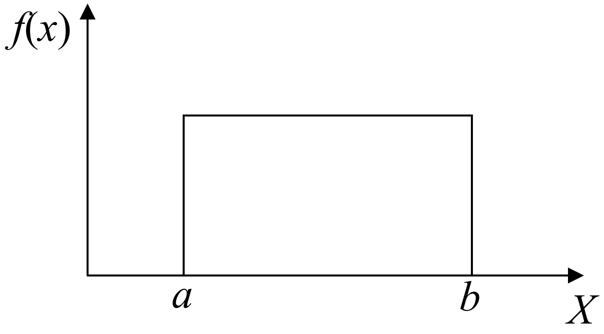
$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right)$$

$$E(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

Distribuição Uniforme (Contínua)



$$a \le x \le b$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = ?$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

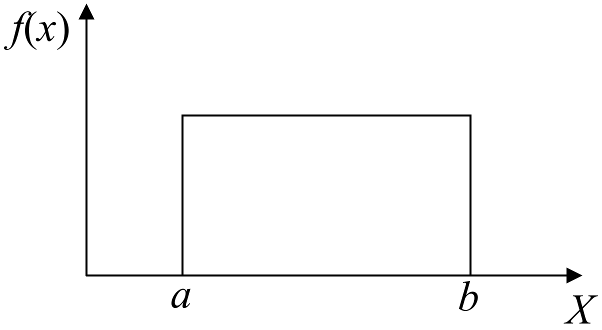
$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right)$$

$$E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

Distribuição Uniforme (Contínua)



$$a \le x \le b$$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$Var(X)=?$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$Var(X)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}$$

$$Var(X)=\frac{4(b^3-a^3)-3(b-a)(a+b)^2}{12(b-a)}$$

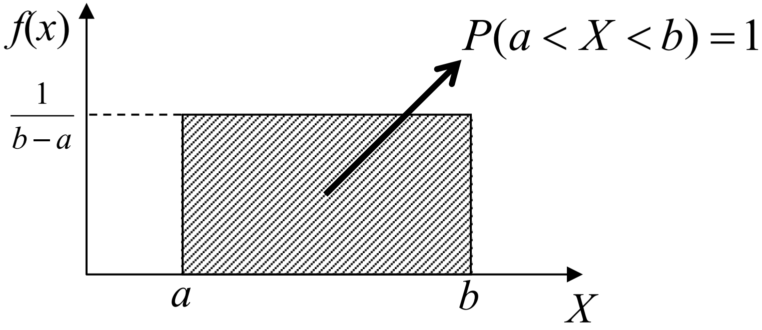
$$Var(X)=\frac{4b^3-4a^3-3b^3-3ab^2+3a^2b+3a^3}{12(b-a)}$$

$$Var(X)=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{12(b-a)}=\frac{(b-a)^{\cancel{3}}}{12\cancel{(b-a)}}=\boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Distribuição Uniforme (Contínua)

Uma variável aleatória X tem distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \le x \le b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



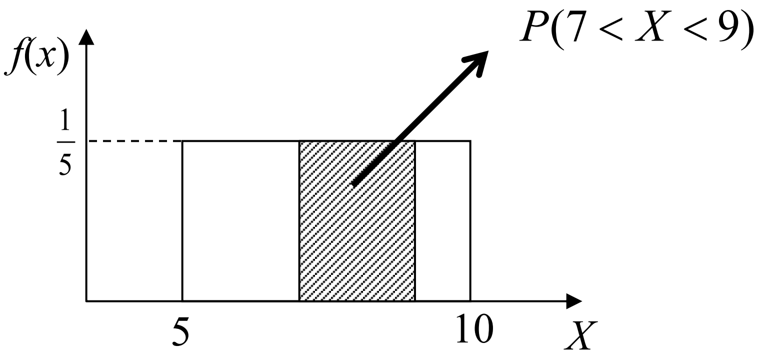
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo: $X \sim U(5,10) \qquad \Rightarrow 5 \le x \le 10$

$$P(7 < X < 9) = \int_7^9 f(x)dx$$

$$= (9-7).\frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

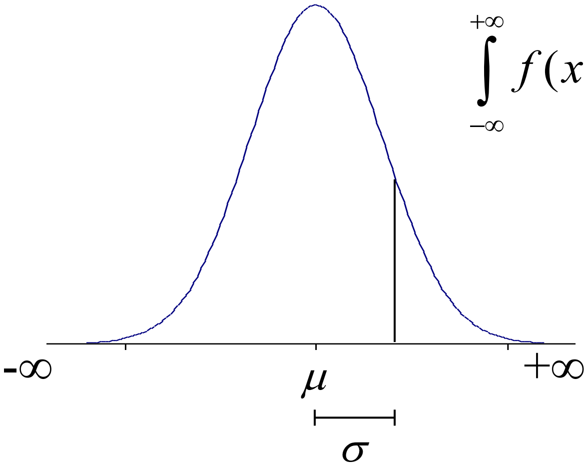


Distribuição Normal ou Gaussiana

Uma variável aleatória X tem distribuição Normal se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

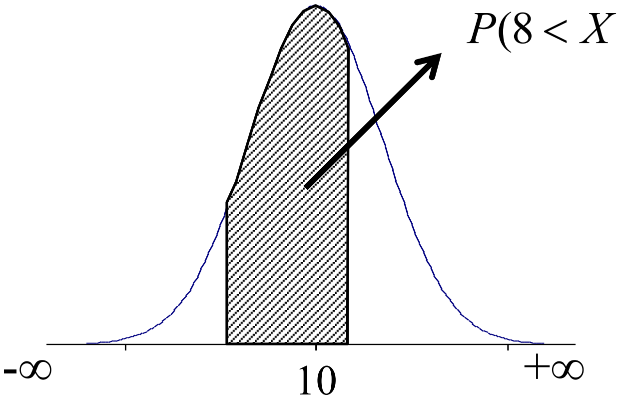


$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Exemplo: $X \sim N(10,4) \quad \Rightarrow \mu = 10 \quad \sigma^2 = 4$

$$P(8 < X < 11) = \int_{8}^{11} f(x)dx$$



$P(8 < X < 11)$

Distribuição Normal ou Gaussiana

Propriedade: se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$ então $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

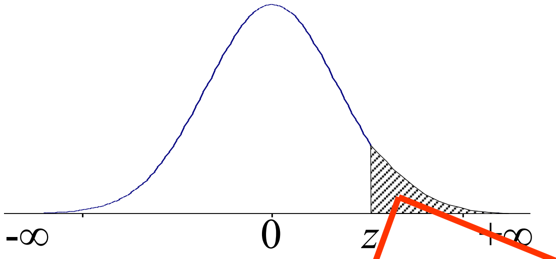
$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E\left(X-\mu\right) = \frac{1}{\sigma}\left(E(X)-\mu\right) = \frac{1}{\sigma}\left(\mu-\mu\right) = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var\left(X-\mu\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var\left(X\right) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

$\boxed{Z \sim N(0,1)}$ $\Rightarrow$ Distribuição Normal Padrão

(valores de probabilidade podem ser tabelados!)

Distribuição Normal Padrão



$$P(Z > z)$$

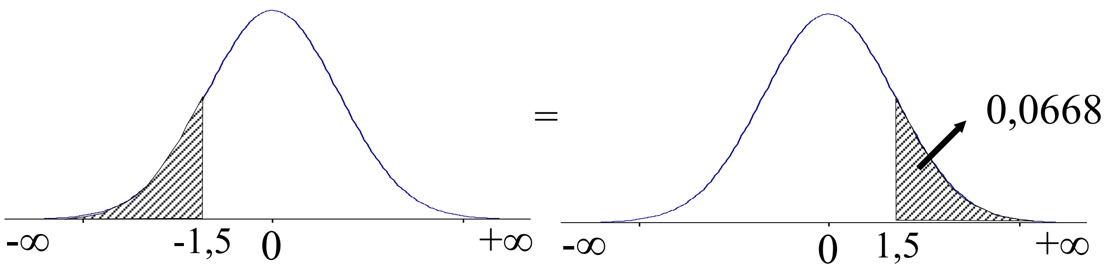
$$P(Z > 2{,}17) = ?$$

$$P(Z > 2{,}17) = 0{,}0150$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

Distribuição Normal Padrão (Exemplos)

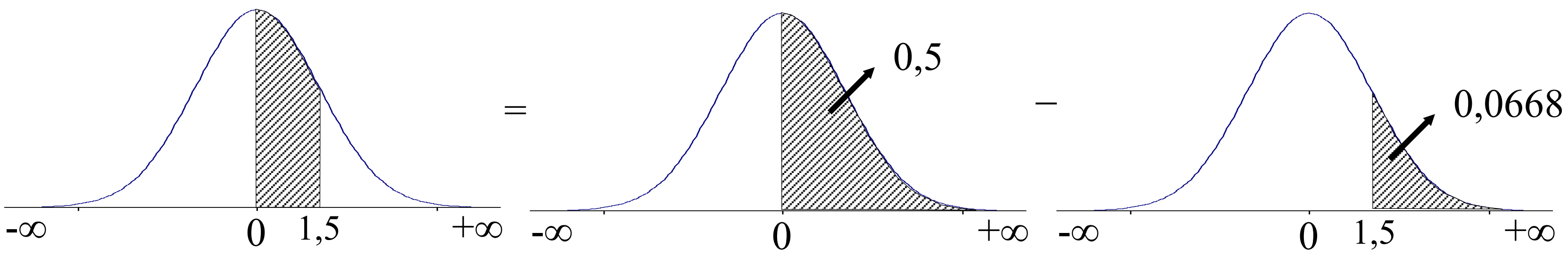
$$P(Z < -1,5) = ?$$



$$P(Z < -1,5) = P(Z > 1,5) = 0,0668$$

Distribuição Normal Padrão (Exemplos)

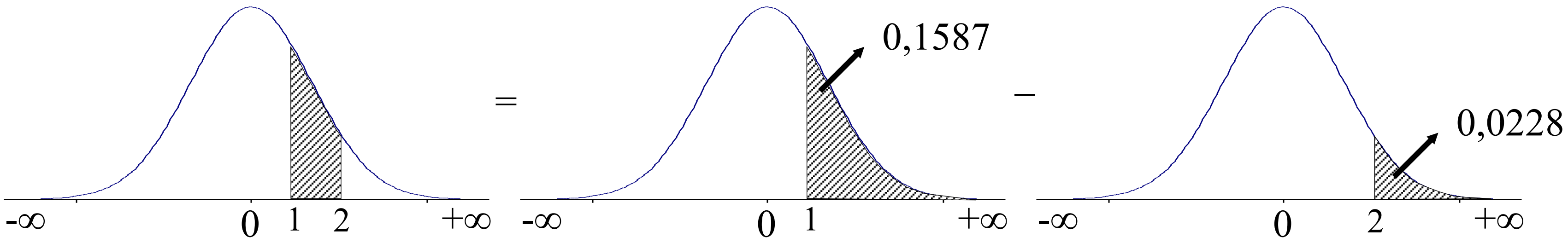
$P(0 > Z > 1,5) = ?$



$P(0 > Z > 1,5) = 0,5 - 0,0668 = 0,4332$

Distribuição Normal Padrão (Exemplos)

$P(1 < Z < 2) = ?$



$P(1 < Z < 2) = 0,1587 - 0,0228 = 0,1359$

Distribuição Normal (Exemplos)

$$X \sim N(10,4)$$

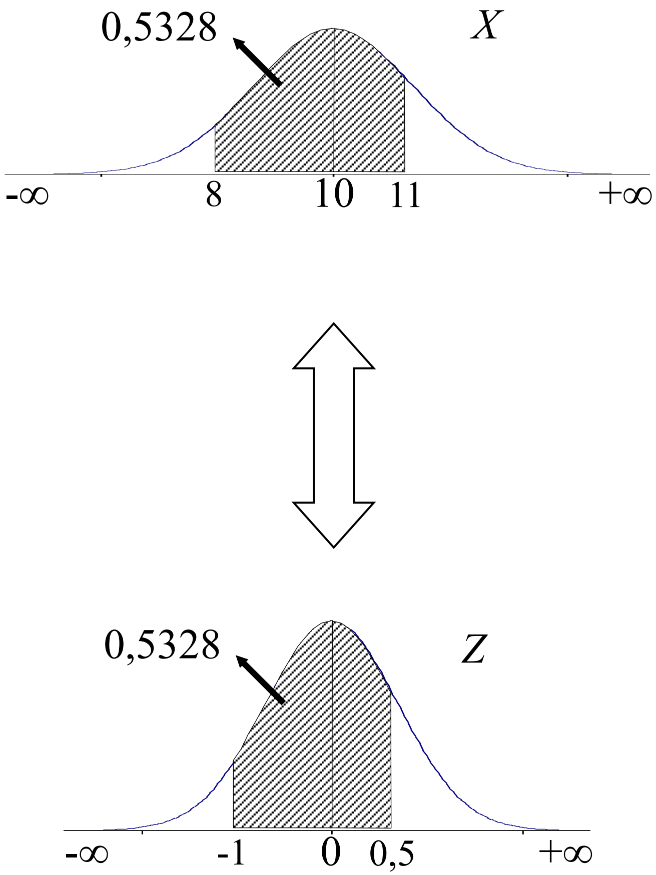
$$P(8 < X < 11) = ?$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(8-10 < X-10 < 11-10) = ?$$

$$P\left(\frac{8-10}{2} < \underset{Z}{\boxed{\frac{X-10}{2}}} < \frac{11-10}{2}\right) = ?$$

$$P(-1 < Z < 0,5) = ?$$



Distribuição da Soma de Variáveis Aleatórias

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X_3 \sim N(\mu_3, \sigma_3^2) \end{array}\right\} \text{ 3 v.a. independentes com distribuições normal}$$

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

Qual a distribuição de Y?

$$\boxed{Y \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}$$

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

$$Var(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

Distribuição da Soma de Variáveis Aleatórias

$$\left.\begin{array}{c} X_1 \sim ?(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim ?(\mu_2, \sigma_2^2) \\ \vdots \\ X_n \sim ?(\mu_n, \sigma_n^2) \end{array}\right\}$$

n v.a. independentes com distribuições desconhecidas

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Qual a distribuição de Y?

se n for grande:

$$\boxed{Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)}$$

Teorema do Limite Central

Teorema do Limite Central

A soma de n v.a. independentes tende para uma Normal a medida que $n \to \infty$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ então $Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \,, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$ para qualquer valor de n

> "A soma de normais independentes é sempre uma normal!"

Se $X_i \sim ?\,(\mu_i, \sigma_i^2)$ então $Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \,, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$ somente se n for grande!!!! (TLC válida)

Esta convergência acontece mais rapidamente quanto mais parecida for a forma da distribuição original (desconhecida) da normal

(ver TLC.xls)

Aproximação da Binomial à Normal

Se Y tem uma distribuição binomial com parâmetros n e p:

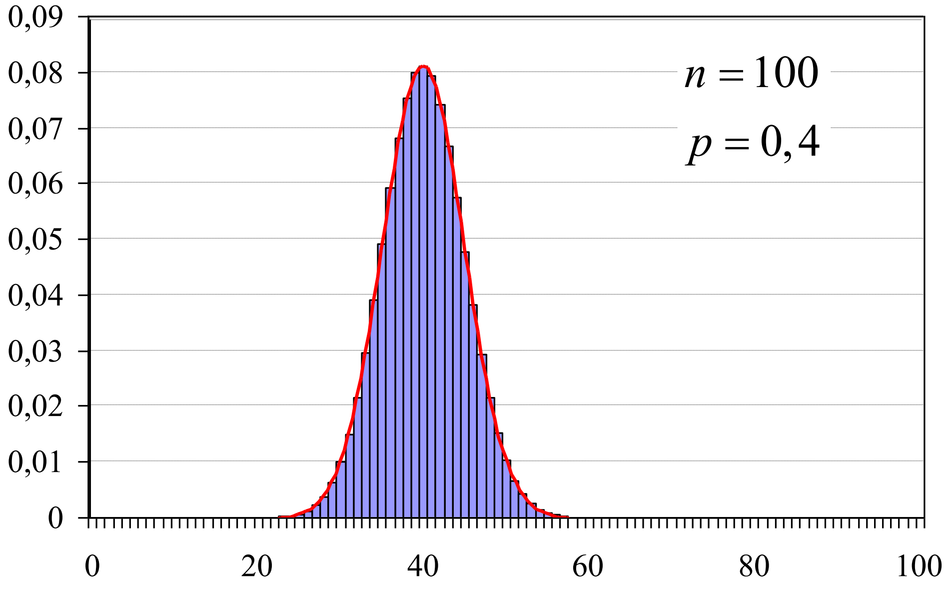
$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ onde cada X_i tem distribuição Bernoulli (X_i: $\{0, 1\}$) com $\mu = p$ e $\sigma^2 = pq$

Então, se n for grande, pelo TLC, Y tende a uma Normal, ou seja,

$$Y \sim N(np, npq)$$

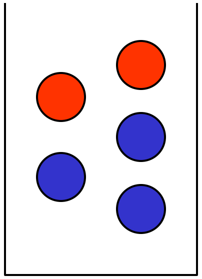
$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = np$$

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) = npq$$



OBS: Se $p = 0{,}5$, a distribuição Binomial é simétrica e, portanto, rapidamente converge para Normal.

Aproximação da Binomial à Normal



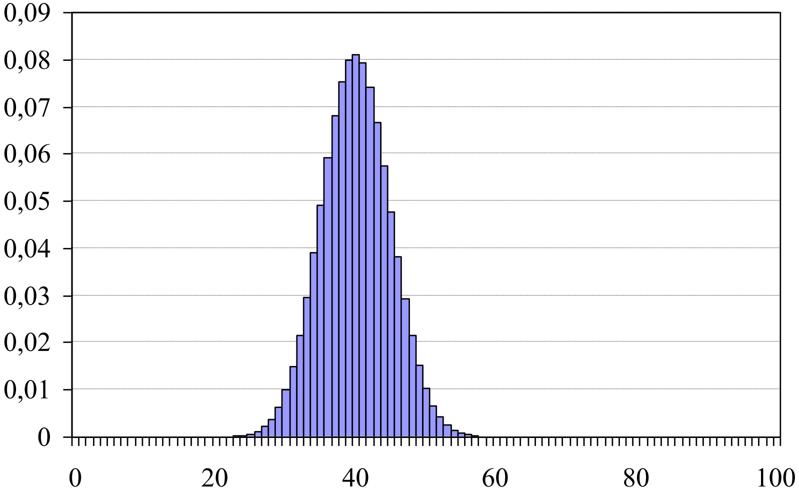
Exemplo
Considere o experimento: retiram-se 100 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 100 escolhidas.
Calcule: $P(30 \leq X \leq 51)$

$$n = 100 \qquad p = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$f(x) = \binom{100}{x} 0,4^x 0,6^{100-x}$$

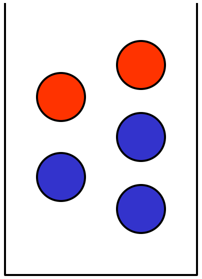
$$P(30 \leq X \leq 51) = \sum_{x=30}^{51} \binom{100}{x} 0,4^x 0,6^{100-x}$$

(valor exato)



Aproximando-se à Normal...

Aproximação da Binomial à Normal



Exemplo

Considere o experimento: retiram-se 100 bolas da urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 100 escolhidas.

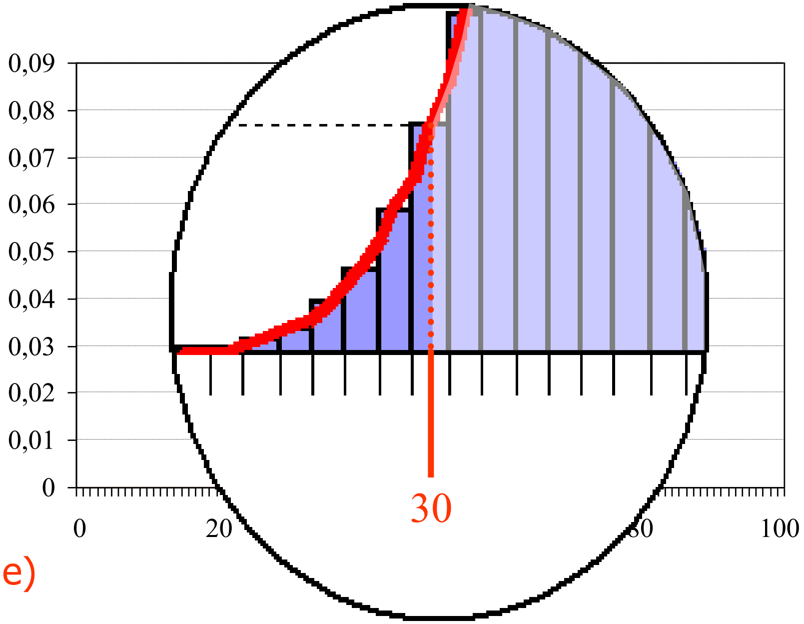
Calcule: $P(30 \leq X \leq 51)$

$$n = 100 \qquad p = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$E(X) = np = 100 * 0,4 = 40$$

$$Var(X) = npq = 100 * 0,4 * 0,6 = 24$$

Pelo TLC: $X \sim N(40, 24)$



$P(29,5 < X < 51,5) = ?$ (correção de continuidade)

$$P\left(\frac{29,5-40}{\sqrt{24}} < Z < \frac{51,5-40}{\sqrt{24}}\right) = P\left(-2,143 < Z < 2,347\right) = 0,9745$$

(valor exato para Binomial $\Rightarrow$ 0,9752)

Distribuição Normal ou Gaussiana

Resumindo...

- Transformações lineares de uma Normal não alteram sua distribuição, apenas sua média e variância

$Y = aX + b$ Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

- A soma de v.a. independentes com distribuição Normal resulta numa nova v.a. cuja distribuição também é Normal com média igual a soma das médias e variância igual a soma das variâncias

Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ então $Y \sim \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$

- A soma de um grande número de v.a. independentes com distribuição desconhecida resulta numa nova v.a. cuja distribuição tende a uma Normal com média igual a soma das médias e variância igual a soma das variâncias

Se $X_i \sim ?\,(\mu_i, \sigma_i^2)$ então $Y \sim \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$ se n grande

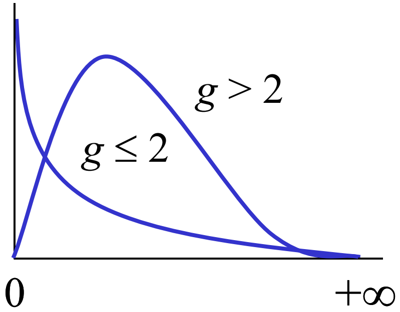
Teorema do Limite Central

Distribuição χ^2

Uma variável aleatória X tem distribuição χ^2 se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2^{g/2}\Gamma(g/2)} x^{g/2-1} e^{-x/2} \qquad x \geq 0$$

$$g = \{1, 2, 3, \ldots\}$$



$$\left.\begin{array}{l} E(X) = g \\ Var(X) = 2g \end{array}\right\} \quad X \sim \chi_g^2$$

(lê-se: X tem distribuição qui-quadrado com g graus de liberdade*)

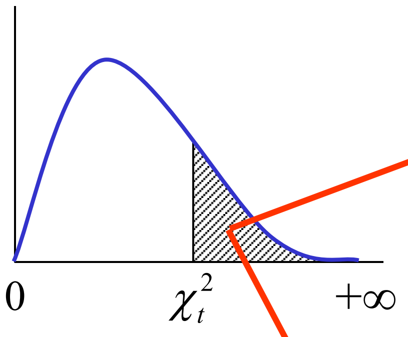
Propriedades:

a) se $Z \sim N(0,1)$, então $Z^2 \sim \chi_1^2$

b) se $X_i \sim \chi_1^2$, então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi_n^2$

*O conceito de "graus de liberdade" será discutido em 05InfEstat_EstimPontual (slide 42)

Distribuição χ^2



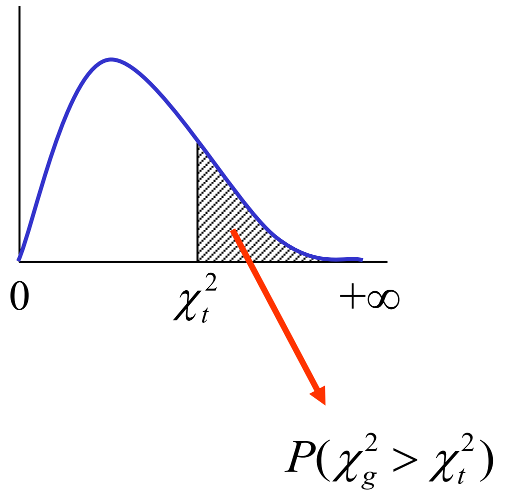
$$P(\chi_g^2 > \chi_t^2)$$

$$P(\chi_{10}^2 > 3,25) = ?$$

$$P(\chi_{10}^2 > 3,25) = 0,975$$

g	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	0,016	0,0039	0,0010	0,00016	0,00004
2	10,60	9,21	7,38	5,99	4,61	0,21	0,10	0,051	0,020	0,010
3	12,84	11,34	9,35	7,81	6,25	0,58	0,35	0,22	0,11	0,072
4	14,86	13,28	11,14	9,49	7,78	1,06	0,71	[illegible]	0,30	0,21
5	16,75	15,09	12,83	11,07	9,24	1,61	1,15	[illegible]	0,55	0,41
6	18,55	16,81	14,45	12,59	10,64	2,20	1,64	[illegible]	0,87	0,68
7	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	2,83	2,17	[illegible]	1,24	0,99
8	21,95	20,09	17,53	15,51	13,36	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73
10	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,76	24,72	21,92	19,68	17,28	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	31,32	29,14	26,12	23,68	21,06	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	10,09	8,67	7,56	6,41	5,70
18	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	10,86	9,39	8,23	7,01	6,26
19	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	11,65	10,12	8,91	7,63	6,84
20	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	12,44	10,85	9,59	8,26	7,43
21	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	13,24	11,59	10,28	8,90	8,03
22	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	14,04	12,34	10,98	9,54	8,64
23	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	14,85	13,09	11,69	10,20	9,26
24	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	15,66	13,85	12,40	10,86	9,89
25	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52
26	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16
27	49,64	46,96	43,19	40,11	36,74	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81
28	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	18,94	16,93	15,31	13,56	12,46
29	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12
30	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79
40	66,77	63,69	59,34	55,76	51,81	29,05	26,51	24,43	22,16	20,71
50	79,49	76,15	71,42	67,50	63,17	37,69	34,76	32,36	29,71	27,99
60	91,95	88,38	83,30	79,08	74,40	46,46	43,19	40,48	37,48	35,53
70	104,21	100,43	95,02	90,53	85,53	55,33	51,74	48,76	45,44	43,28
80	116,32	112,33	106,63	101,88	96,58	64,28	60,39	57,15	53,54	51,17
90	128,30	124,12	118,14	113,15	107,57	73,29	69,13	65,65	61,75	59,20
100	140,17	135,81	129,56	124,34	118,50	82,36	77,93	74,22	70,06	67,33

Distribuição χ^2



$$P(\chi_{10}^2 > 3,25) = ?$$

$$P(\chi_{10}^2 > 3,25) = 0,975$$

$$P(\chi_{15}^2 > ?) = 0,9$$

$$P(\chi_{15}^2 > 8,55) = 0,9$$

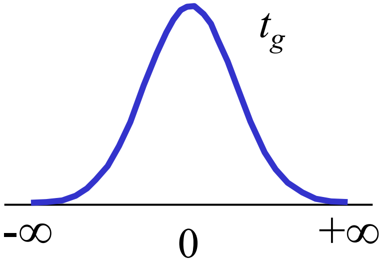
g	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	$\boxed{0,900}$	0,950	0,975	0,990	0,995
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	0,016	0,0039	0,0010	0,00016	0,00004
2	10,60	9,21	7,38	5,99	4,61	0,21	0,10	0,051	0,020	0,010
3	12,84	11,34	9,35	7,81	6,25	0,58	0,35	0,22	0,11	0,072
4	14,86	13,28	11,14	9,49	7,78	1,06	0,71	0,48	0,30	0,21
5	16,75	15,09	12,83	11,07	9,24	1,61	1,15	0,83	0,55	0,41
6	18,55	16,81	14,45	12,59	10,64	[illegible]	1,64	1,24	0,87	0,68
7	20,28	18,48	16,01	14,07	12,02	[illegible]	2,17	1,69	1,24	0,99
8	21,95	20,09	17,53	15,51	13,36	[illegible]	2,73	2,18	1,65	1,34
9	23,59	21,67	19,02	16,92	14,68	[illegible]	3,33	2,70	2,09	1,73
10	25,19	23,21	20,48	18,31	15,99	[illegible]	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,76	24,72	21,92	19,68	17,28	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	28,30	26,22	23,34	21,03	18,55	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	29,82	27,69	24,74	22,36	19,81	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	31,32	29,14	26,12	23,68	21,06	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	32,80	30,58	27,49	25,00	22,31	$\boxed{8,55}$	7,26	6,26	5,23	4,60
16	34,27	32,00	28,85	26,30	23,54	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	35,72	33,41	30,19	27,59	24,77	10,09	8,67	7,56	6,41	5,70
18	37,16	34,81	31,53	28,87	25,99	10,86	9,39	8,23	7,01	6,26
19	38,58	36,19	32,85	30,14	27,20	11,65	10,12	8,91	7,63	6,84
20	40,00	37,57	34,17	31,41	28,41	12,44	10,85	9,59	8,26	7,43
21	41,40	38,93	35,48	32,67	29,62	13,24	11,59	10,28	8,90	8,03
22	42,80	40,29	36,78	33,92	30,81	14,04	12,34	10,98	9,54	8,64
23	44,18	41,64	38,08	35,17	32,01	14,85	13,09	11,69	10,20	9,26
24	45,56	42,98	39,36	36,42	33,20	15,66	13,85	12,40	10,86	9,89
25	46,93	44,31	40,65	37,65	34,38	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52
26	48,29	45,64	41,92	38,89	35,56	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16
27	49,64	46,96	43,19	40,11	36,74	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81
28	50,99	48,28	44,46	41,34	37,92	18,94	16,93	15,31	13,56	12,46
29	52,34	49,59	45,72	42,56	39,09	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12
30	53,67	50,89	46,98	43,77	40,26	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79
40	66,77	63,69	59,34	55,76	51,81	29,05	26,51	24,43	22,16	20,71
50	79,49	76,15	71,42	67,50	63,17	37,69	34,76	32,36	29,71	27,99
60	91,95	88,38	83,30	79,08	74,40	46,46	43,19	40,48	37,48	35,53
70	104,21	100,43	95,02	90,53	85,53	55,33	51,74	48,76	45,44	43,28
80	116,32	112,33	106,63	101,88	96,58	64,28	60,39	57,15	53,54	51,17
90	128,30	124,12	118,14	113,15	107,57	73,29	69,13	65,65	61,75	59,20
100	140,17	135,81	129,56	124,34	118,50	82,36	77,93	74,22	70,06	67,33

Distribuição *t de Student*

Uma variável aleatória X tem distribuição *t de Student* se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma[(g+1)/2]}{\Gamma(g/2)\sqrt{\pi g}}\left(1+\frac{x^2}{g}\right)^{-(g+1)/2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$g = \{1, 2, 3, \ldots\}$$



$$\left.\begin{array}{l} E(X) = 0 \\ Var(X) = \dfrac{g}{g-2} \end{array}\right\} \quad X \sim t_g$$

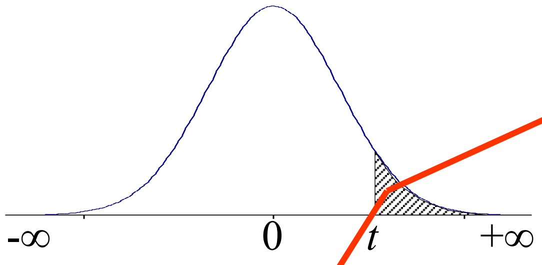
(lê-se: X tem distribuição *t de Student* com g graus de liberdade)

Propriedades:

a) se $Z \sim N(0,1)$ e $W \sim \chi^2_g$ então $\dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{W}{g}}} \sim t_g$

b) se $g \to \infty$ então $t_g \to N(0,1)$

Distribuição *t de Student*



$P(T_g > t)$

g	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3[illegible]47	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3[illegible]65	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3[illegible]43	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,[illegible]98	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

$$P(T_{10} > ?) = 0,01$$

$$P(T_{10} > 2,764) = 0,01$$

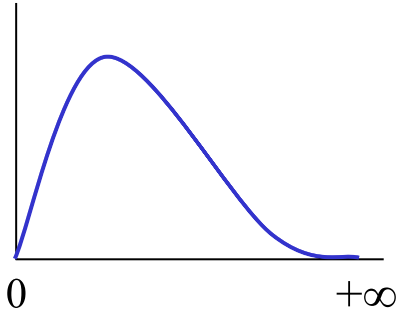
Distribuição *F* (*de Snedecor*)

Uma variável aleatória X tem distribuição F se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma[(g_1 + g_2)/2]}{\Gamma(g_1/2)\Gamma(g_2/2)} \left(\frac{g_1}{g_2}\right)^{g_1/2} x^{g_1/2-1} \left(1 + \frac{g_1}{g_2} x\right)^{-(g_1+g_2)/2} \qquad x \geq 0$$

$$g_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

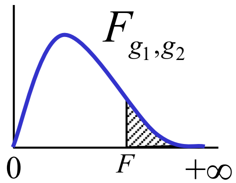
$$g_2 = \{1, 2, 3, \ldots\}$$



$$\left.\begin{aligned} E(X) &= \frac{g_2}{g_2 - 2} \\ Var(X) &= \frac{2g_2^2(g_1 + g_2 - 2)}{g_1(g_2 - 2)^2(g_2 - 4)} \end{aligned}\right\} X \sim F_{g_1,g_2}$$

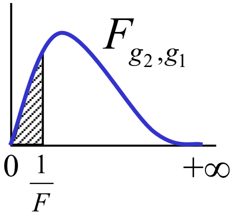
(lê-se: X tem distribuição F com g_1 e g_2 graus de liberdade)

Propriedades:

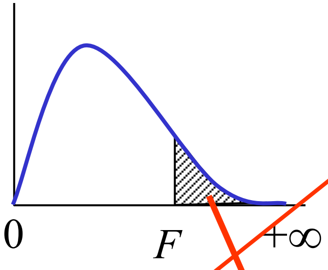


a) se $U \sim \chi^2_{g_1}$ e $V \sim \chi^2_{g_2}$ então $\dfrac{U/g_1}{V/g_2} \sim F_{g_1,g_2}$

b) se $X \sim F_{g_1,g_2}$ então $\dfrac{1}{X} \sim F_{g_2,g_1}$ $\quad \Rightarrow P(F_{g_1,g_2} > F) = P(F_{g_2,g_1} < \dfrac{1}{F})$



Distribuição F



$$P(F_{g_1 g_2} > F) = 0,025$$

$$P(F_{15,20} > ?) = 0,025$$

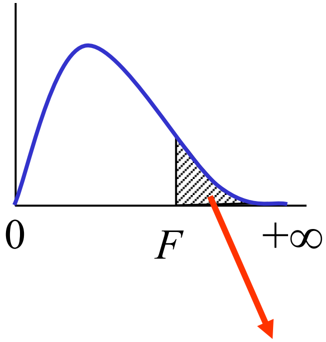
$$P(F_{15,20} > 2,57) = 0,025$$

g_1

g_2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25	30	40	50	100
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	973.0	976.7	984.9	993.1	998.1	1001	1006	1008	1013
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	14.01	13.96
4	12.22	10.65	9.98	9.61	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.38	8.32
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.14	6.08
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.98	4.92
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.28	4.21
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.81	3.74
9	7.21	5.72	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.47	3.40
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.22	3.15
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.03	2.96
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.87	2.80
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.74	2.67
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.64	2.56
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.55	2.47
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.47	2.40
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.41	2.33
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.35	2.27
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.30	2.22
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.25	2.17
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.21	2.13
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.17	2.09
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.14	2.06
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.11	2.02
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.08	2.00
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.97	1.88
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.83	1.74
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26	2.22	2.11	1.99	1.92	1.87	1.80	1.75	1.66
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	2.12	2.08	1.97	1.85	1.77	1.71	1.64	1.59	1.48

Distribuição F



$$P(F_{g_1,g_2} > F) = 0{,}025$$

$$P(F_{25,5} < ?) = 0{,}025$$

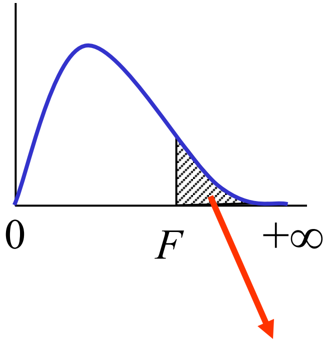
$$P(F_{5,25} > ?) = 0{,}025$$

g_1

g_2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25	30	40	50	100
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	973.0	976.7	984.9	993.1	998.1	1001	1006	1008	1013
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	14.01	13.96
4	12.22	10.65	9.98	9.61	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.38	8.32
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.14	6.08
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.98	4.92
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.28	4.21
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.81	3.74
9	7.21	5.72	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.47	3.40
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.22	3.15
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.03	2.96
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.87	2.80
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.74	2.67
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.64	2.56
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.55	2.47
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.47	2.40
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.41	2.33
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.35	2.27
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.30	2.22
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.25	2.17
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.21	2.13
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.17	2.09
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.14	2.06
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.11	2.02
25	5.69	4.29	3.69	3.35	$\boxed{3.13}$	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.08	2.00
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.97	1.88
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.83	1.74
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26	2.22	2.11	1.99	1.92	1.87	1.80	1.75	1.66
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	2.12	2.08	1.97	1.85	1.77	1.71	1.64	1.59	1.48

Distribuição F



$$P(F_{g_1,g_2} > F) = 0{,}025$$

g_1

g_2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	25	30	40	50	100
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	973.0	976.7	984.9	993.1	998.1	1001	1006	1008	1013
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	14.01	13.96
4	12.22	10.65	9.98	9.61	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.38	8.32
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.14	6.08
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.98	4.92
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.28	4.21
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.81	3.74
9	7.21	5.72	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.47	3.40
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.22	3.15
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.03	2.96
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.87	2.80
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.74	2.67
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.64	2.56
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.55	2.47
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.47	2.40
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.41	2.33
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.35	2.27
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.30	2.22
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.25	2.17
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.21	2.13
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.17	2.09
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.14	2.06
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.11	2.02
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.08	2.00
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.97	1.88
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.83	1.74
50	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26	2.22	2.11	1.99	1.92	1.87	1.80	1.75	1.66
100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	2.12	2.08	1.97	1.85	1.77	1.71	1.64	1.59	1.48

$$P(F_{25,5} < ?) = 0{,}025$$

$$P(F_{5,25} > ?) = 0{,}025$$

$$P(F_{5,25} > 3{,}13) = 0{,}025$$

$$P(F_{25,5} < \frac{1}{3{,}13}) = 0{,}025$$

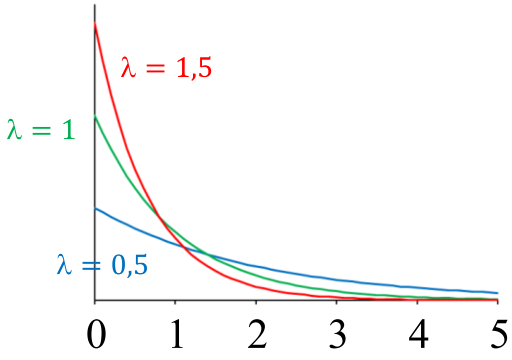
$$P(F_{25,5} < 0{,}319) = 0{,}025$$

Distribuição Exponencial

Uma variável aleatória X tem distribuição Exponencial se sua função densidade de probabilidade for dada por:

⍰

$$f(x) = \quad e^{-\lambda x} \qquad \begin{matrix} x \geq 0 \\ \lambda > 0 \end{matrix}$$



⍰

$$\left.\begin{matrix} E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \\ Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2} \end{matrix}\right\} \quad X \sim Exp(\quad)$$

(lê-se: X tem distribuição exponencial com parâmetro λ)

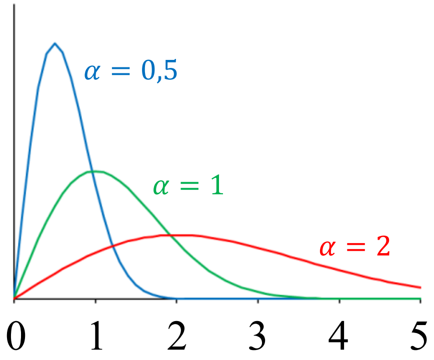
Propriedade:

Se $X_i, X_j \sim Exp(\lambda)$ independentes então $\frac{X_i}{X_i + X_j} \sim U(0,1)$

Distribuição *Rayleigh*

Uma variável aleatória X tem distribuição *Rayleigh* se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{x}{\alpha^2} e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} \qquad \begin{matrix} x \geq 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix}$$



$$\left.\begin{matrix} E(X) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ Var(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\alpha^2 \end{matrix}\right\} \quad X \sim Rayleigh(\alpha)$$

(lê-se: X tem distribuição *Rayleigh* com parâmetro α)

Propriedades:

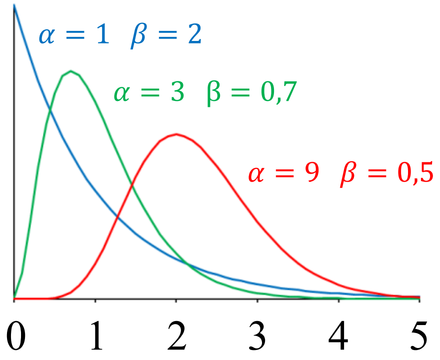
a) Se $X_i, X_j \sim N(0, \sigma^2)$ independentes então $\sqrt{X_i^2 + X_j^2} \sim Rayleigh(\sigma)$

b) Se $X \sim Exp(\lambda)$ então $\sqrt{X} \sim Rayleigh\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)$

Distribuição *Gamma*

Uma variável aleatória X tem distribuição *Gamma* se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \qquad \begin{matrix} x \geq 0 \\ \alpha, \beta > 0 \end{matrix}$$



$$\left.\begin{matrix} E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ Var(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2} \end{matrix}\right\} \quad X \sim Gamma(\alpha, \beta)$$

(lê-se: X tem distribuição *Gamma* com parâmetros α e β)

Propriedades:

a) Se $X_i \sim Exp(\lambda)$ independentes então $\sum_{i=1}^{N} X_i \sim Gamma(N, \lambda)$

b) Se $X_i \sim Rayleigh(\alpha)$ independentes então $\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sim Gamma\left(N, \frac{1}{2\alpha^2}\right)$

Distribuições Multivariadas

Considere que $\boldsymbol{X}$ representa um vetor de p variáveis aleatórias relacionadas, ou seja, $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$

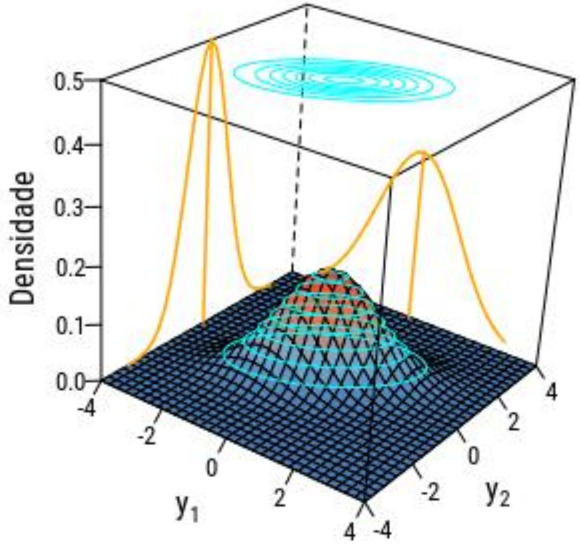
A obtenção da distribuição de probabilidade multivariada (ou conjunta) depende do conhecimento da natureza da relação entre cada uma das p variáveis aleatórias

Alguns exemplos podem ser citados como as distribuições de Wishard, Multinomial, Poisson Multivariada e outras mais específicas usadas em aplicações de radar (Par de intensidades *Multi-look*, por exemplo). Há também outras mais complexas baseadas em teoria de Cópula

Mas a mais conhecida e utilizada é a Distribuição Normal Multivariada, cuja FDP é dada por:

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p|\boldsymbol{\Sigma}|}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})} \qquad -\infty \leq x_i \leq +\infty$$

Distribuição Normal Bivariada



$\boldsymbol{\mu}$ representa o vetor de médias $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$

$\boldsymbol{\Sigma}$ representa a matriz de variância/covariância

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_1, X_p) & \cdots & Var(X_p) \end{bmatrix}$$

http://www.leg.ufpr.br/~paulojus/estbas/slides/407_modelos_multivariados.pdf