
Estatística: Aplicação ao Sensoriamento Remoto

SER 204

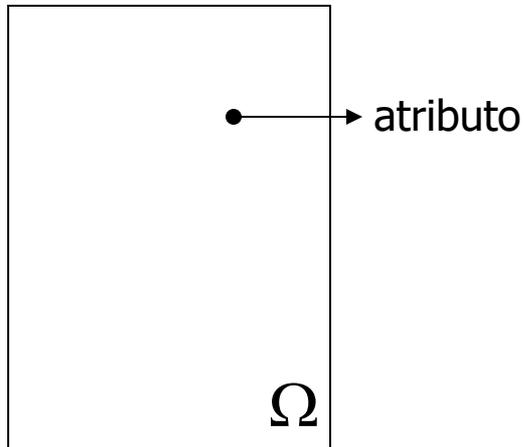
Variáveis Aleatórias

Camilo Daleles Rennó

camilo.renno@inpe.br

acesso do conteúdo do curso em [Bibdigital do INPE](#) ou [GitHub](#)

Variável



Em qualquer tipo de estudo, há sempre a necessidade de se focar em um ou mais atributos (características) dos elementos que compõem esta população (Ω)

Estes atributos constituem as **variáveis** de estudo



atributos quantitativos:

- . biomassa (peso)
- . altura

atributos qualitativos (categóricos):

- . espécie
- . fase fenológica

Tipos de Mensuração

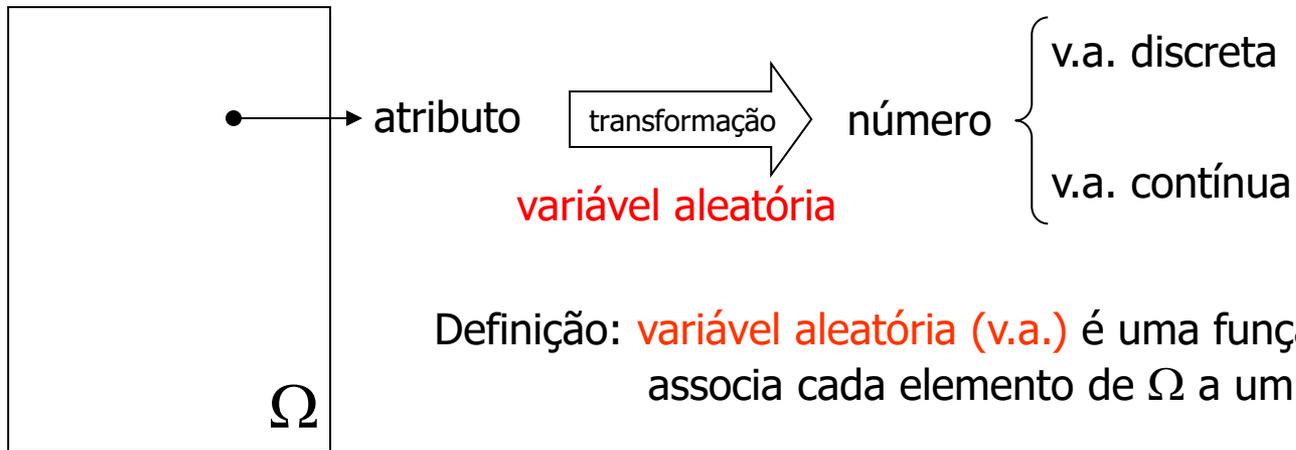


Um atributo representado por números pode ser, por uma conveniência matemática, combinado e/ou sumarizado através de inúmeras manipulações algébricas: soma, produto, mínimo, máximo, média, mediana, etc

Por definição, todos os atributos quantitativos já possuem esta propriedade

Como será visto a seguir, para atributos qualitativos, regras devem ser definidas para transformá-los em números

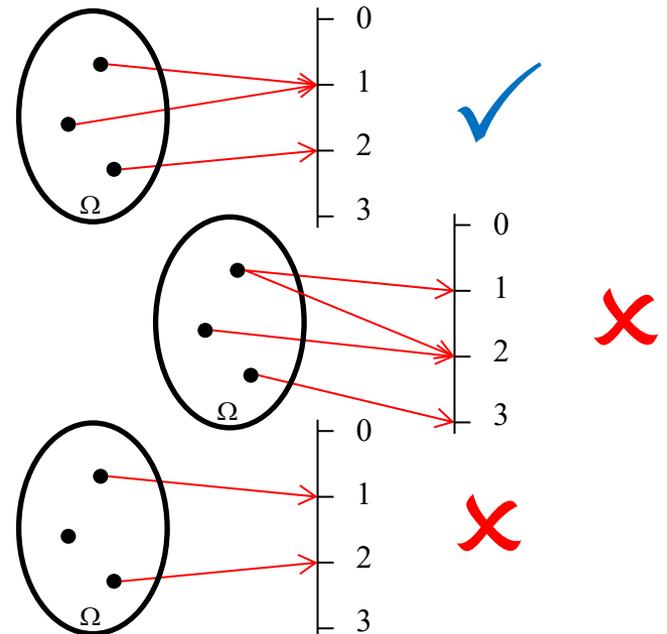
Variável Aleatória



Definição: **variável aleatória (v.a.)** é uma função que associa cada elemento de Ω a um número.

Propriedades de uma v.a.:

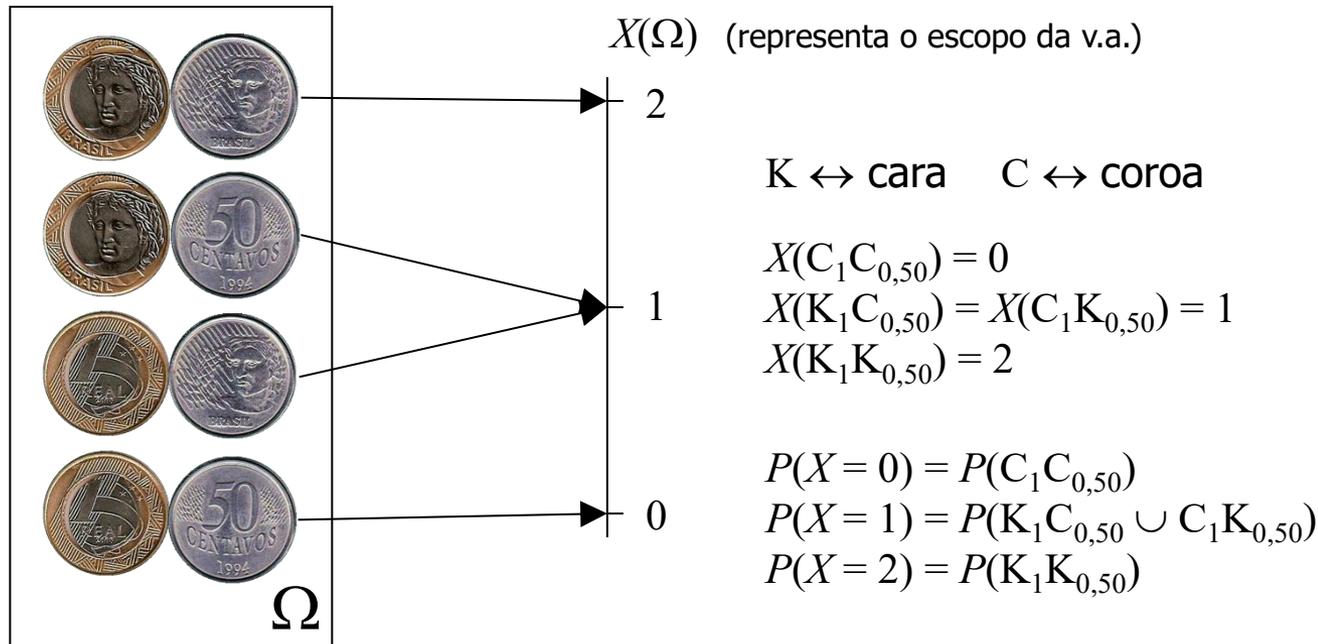
- Cada elemento de Ω deve estar associado a um único número
- Todos os elementos de Ω devem estar associados a algum número
- Vários elementos de Ω podem estar associados ao mesmo número



Variável Aleatória

Experimento: jogar 2 moedas (R\$1,00 e R\$0,50) e observar o resultado

Definindo uma v.a. X : número de caras em 2 lances de moeda



OBS: em $P(X = x)$, a natureza funcional da v.a. foi suprimida. De fato, a expressão mais correta seria $P(\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x)$.
por definição, os valores de uma v.a. são sempre mutuamente exclusivos

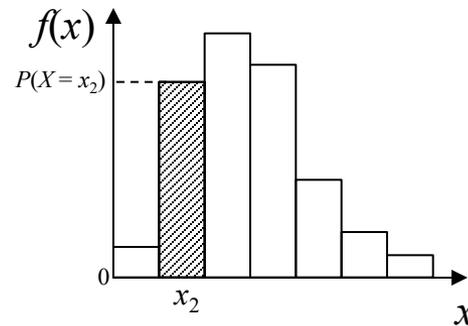
Variável Aleatória Discreta

Definição: uma **v.a.** é **discreta** quando o conjunto de valores possíveis (imagem) for finito ou infinito **numerável**.

$$0 < P(X = x_i) \leq 1 \text{ para todo } x_i \in X(\Omega)$$
$$\sum_i P(X = x_i) = 1$$

Função de Probabilidade

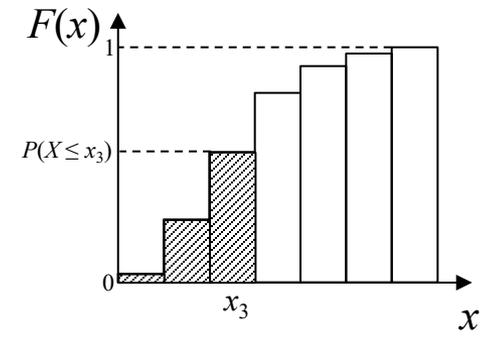
$$f(x) = P(X = x)$$



Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \sum_j f(x_j) \text{ para todo } j \text{ onde } x_j \leq x$$



Variável Aleatória Discreta

Exemplos:

a) jogar um dado

X : ponto obtido no dado

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

X : = 1 se ponto for igual a 6

= 0 caso contrário

$$X = \{0, 1\}$$

b) jogar 5 moedas (ou uma moeda 5 vezes)

X : número de caras em 5 lances

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

c) jogar uma moeda até tirar uma cara

X : número de jogadas até tirar uma cara (incluindo-se a cara)

$$X = \{1, 2, 3, \dots\}$$

X : número de coroas até tirar uma cara

$$X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Variável Aleatória Discreta

Exemplos:

d) sortear um ponto de uma imagem (*8bits*)

X : valor de nível de cinza

$$X = \{0, 1, \dots, 255\}$$

X : = 1 se valor de nível de cinza for menor que 100

= 0 caso contrário

$$X = \{0, 1\}$$

e) sortear 5 pontos em um mapa pedológico

X : número de pontos correspondentes à classe Argissolo

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

f) sortear pontos em um mapa de vegetação até que se encontre a classe Cerrado

X : número de pontos sorteados (incluindo-se o ponto da classe Cerrado)

$$X = \{1, 2, 3, \dots\}$$

X : número de pontos sorteados (excluindo-se o ponto da classe Cerrado)

$$X = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Variável Aleatória Contínua

Definição: uma v.a. é **contínua** quando o conjunto de valores possíveis (imagem) for **inumerável**.

Se o conjunto imagem é inumerável, não há sentido em falar de valores específicos e portanto: $P(X = x) = 0$

Qual a probabilidade de se escolher uma pessoa qualquer com exatos 1,70 metros de altura? $P(X = 1,70) = 0$

← Improvável!

→ 1,700000... (infinitos zeros)

Isso é possível mas é muito pouco provável!

Nesse caso, a probabilidade nula é traduzida como evento improvável mas não impossível

Exceção para os eventos que estejam fora do escopo da v.a. considerada. Nesses casos, a probabilidade nula é sinônimo de evento impossível

Qual a probabilidade de se escolher uma pessoa qualquer com mais do que 10 metros de altura? $P(X > 10) = 0$

← Impossível!

Variável Aleatória Contínua

Definição: uma v.a. é **contínua** quando o conjunto de valores possíveis (imagem) for **inumerável**.

Se o conjunto imagem é inumerável, não há sentido em falar de valores específicos e portanto: $P(X = x) = 0$

$$0 \leq P(a < X < b) \leq 1$$

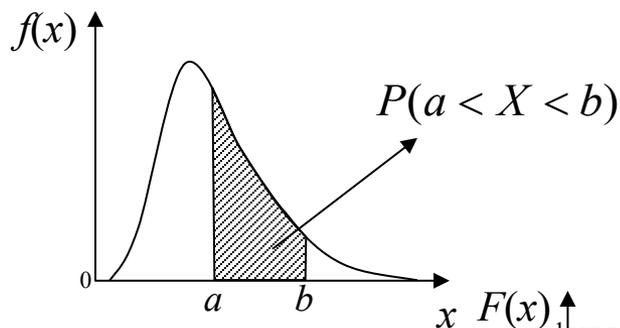
só há sentido em falar de probabilidade para um intervalo de valores!

Função Densidade de Probabilidade (fdp)

$$f(x) \geq 0$$

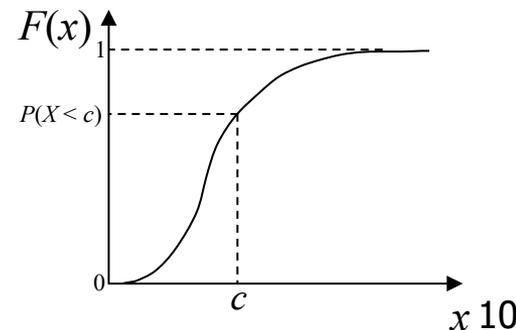
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

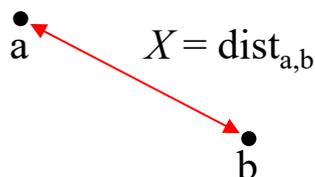


Variável Aleatória Contínua

Exemplos:

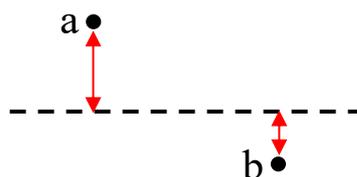
a) X : distância entre dois pontos

$$X = [0, +\infty[$$



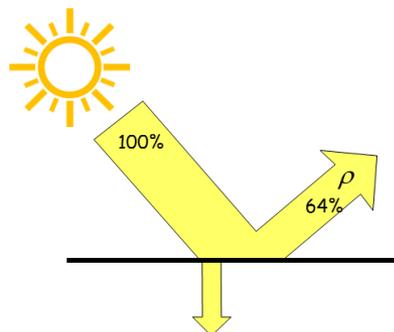
b) X : distância vertical de um ponto, relativa a uma superfície plana pré-definida

$$X =]-\infty, +\infty[$$



c) X : reflectância de um objeto

$$X = [0, 1] = [0, 100\%]$$



V.A. Discretas e Contínuas

Observações importantes

- Variáveis discretas não necessariamente estão associadas a números inteiros

Se $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = X/2$ então

$Y = \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5\}$ e $P(X = 3) = P(Y = 1,5)$

- Não confunda conjunto numerável com conjunto finito

Algumas v.a. discretas são numeráveis mas podem assumir infinitos valores

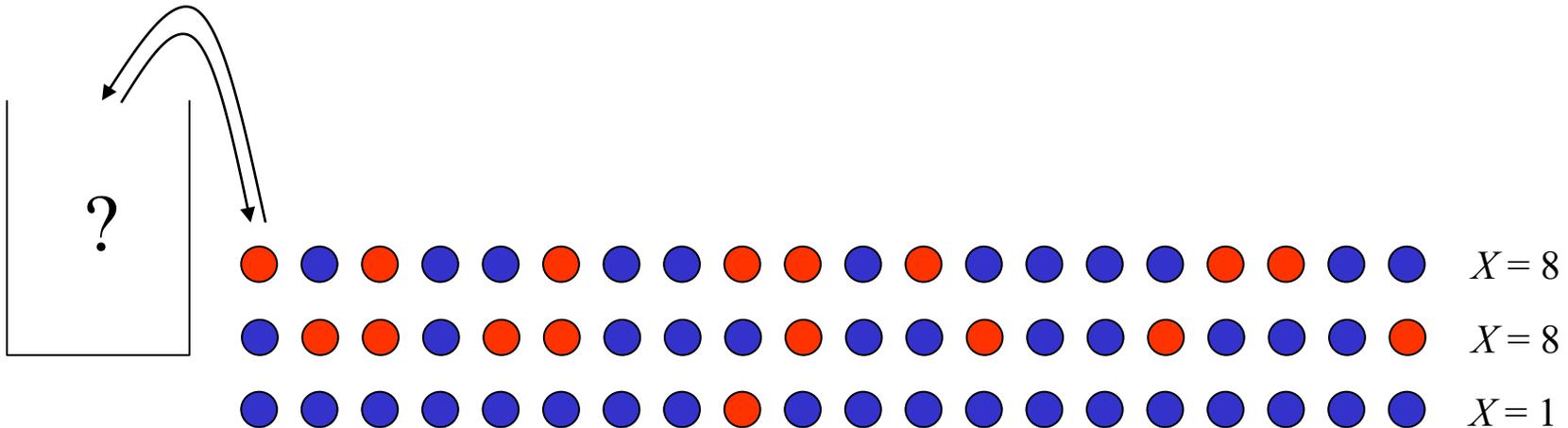
- No processo de medição de uma variável contínua, sempre haverá uma discretização que definirá a precisão desta medição

É importante entender a natureza da variável analisada e não necessariamente como ela é representada

Ex. Imagem de Reflectância (0-100%) discretizada em 256 níveis de cinza
nesse caso, é uma v.a. discreta ou contínua?

Caracterização de uma Variável Aleatória

Exemplo: retiram-se 20 bolas de uma urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 20 escolhidas



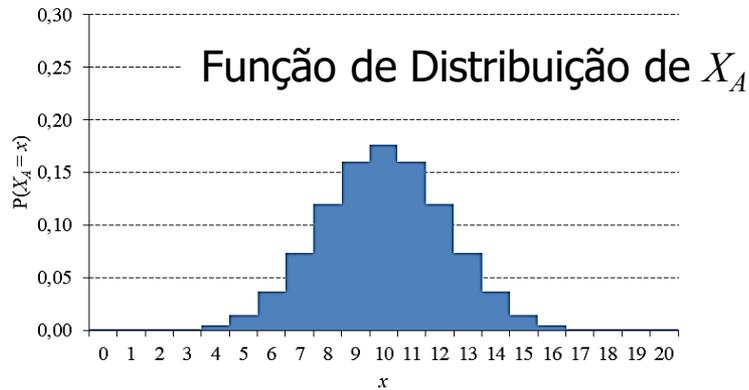
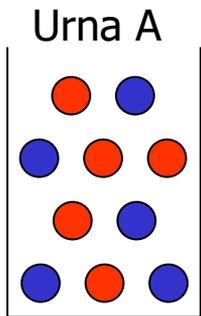
Qual o escopo desta v.a.?

$$X = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$$

$$P(X = x) = ?$$

Caracterização de uma Variável Aleatória

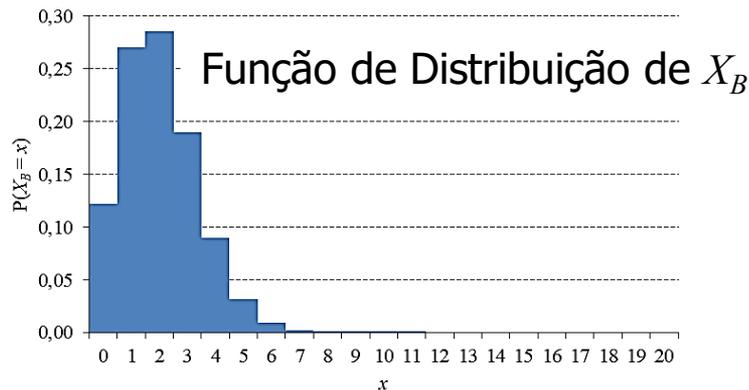
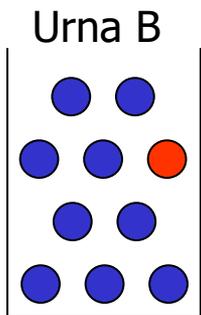
Exemplo: retiram-se 20 bolas de uma urna (com reposição). Define-se uma v.a. X cujos valores representam o número total de bolas vermelhas dentre as 20 escolhidas



Como caracterizar estas variáveis aleatórias de modo a evidenciar suas semelhanças e diferenças?

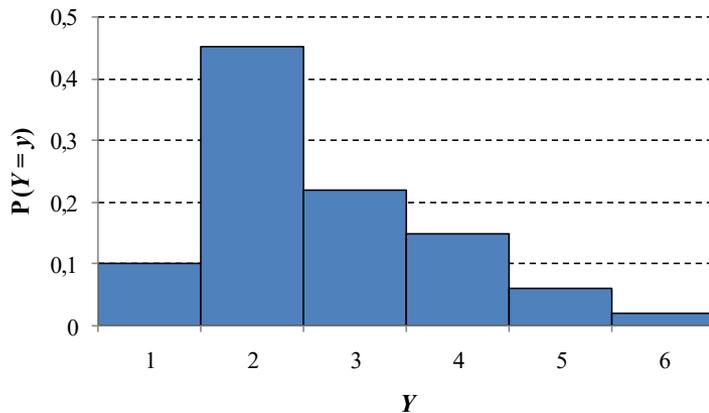
Aspectos principais:

- posição (tendência central)
- dispersão
- forma



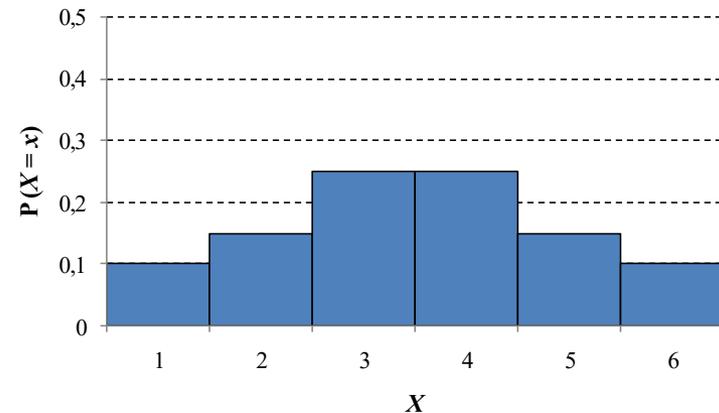
Caracterização de uma Variável Aleatória

Variável Y



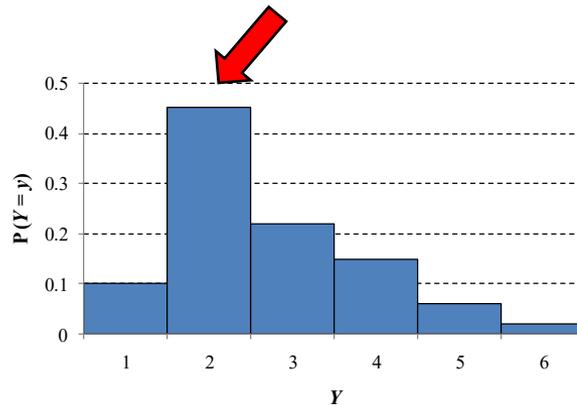
Y	$P(Y=y)$
1	0,10
2	0,45
3	0,22
4	0,15
5	0,06
6	0,02

Variável X



X	$P(X=x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

Medidas de Tendência Central

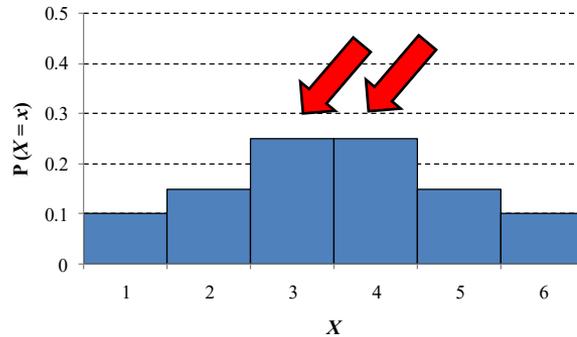


Y	$P(Y=y)$
1	0,10
2	0,45
3	0,22
4	0,15
5	0,06
6	0,02

- Identificar o(s) valor(es) que ocorre(m) com a maior frequência
Moda

$$moda = 2$$

Medidas de Tendência Central



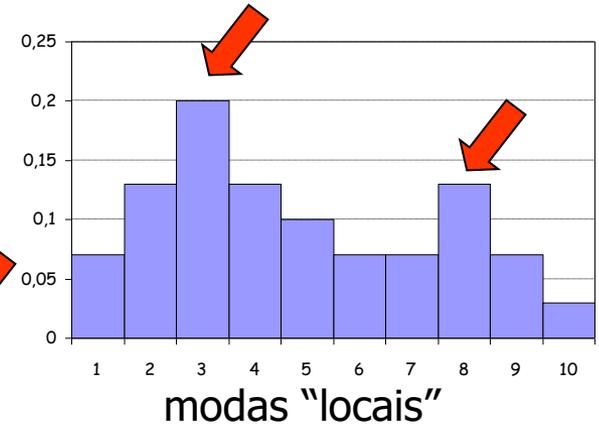
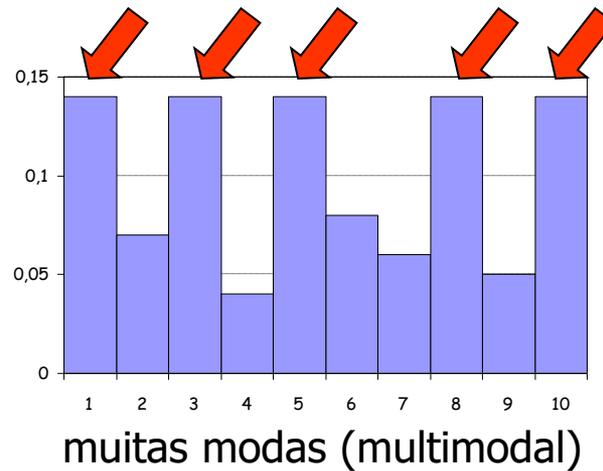
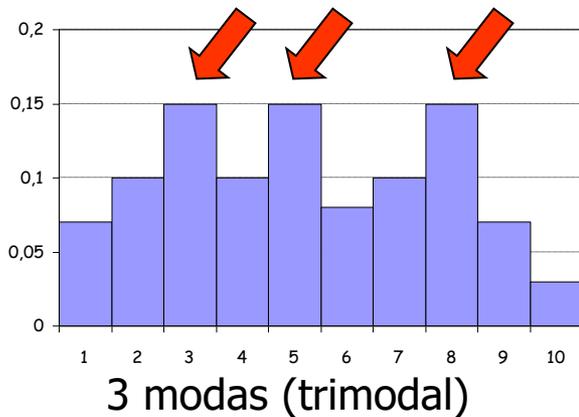
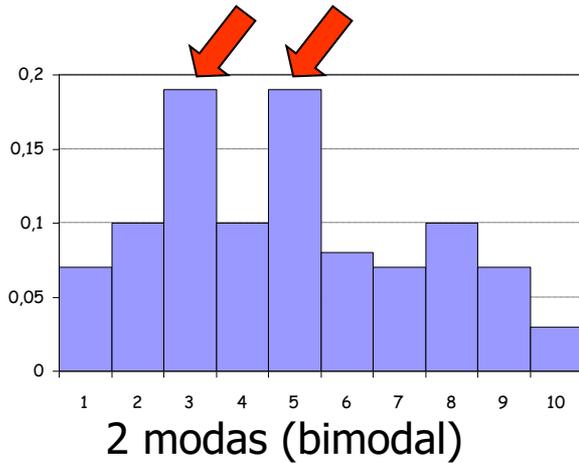
X	$P(X=x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

- Identificar o(s) valor(es) que ocorre(m) com a maior frequência
Moda

$$moda = \{3, 4\}$$

Medidas de Tendência Central

Moda



Medidas de Tendência Central

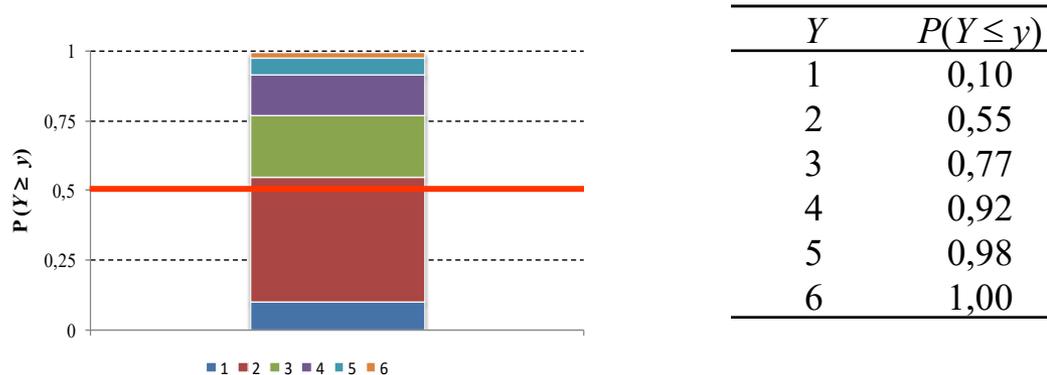
Moda

$$\text{moda} = \{x \mid \forall k : P(X = k) \leq P(X = x)\} \quad \text{v.a. discretas}$$

$$\text{moda} = \arg \max_x f(x) := \{x \mid \forall k : f(k) \leq f(x)\} \quad \text{v.a. contínuas}$$

- Representa valores possíveis da v.a. ✓
- Pode ser usada diretamente em variáveis de qualquer tipo de mensuração, inclusive a nominal (variável qualitativa) ✓
- Pode não existir ou ter muitos valores ✗

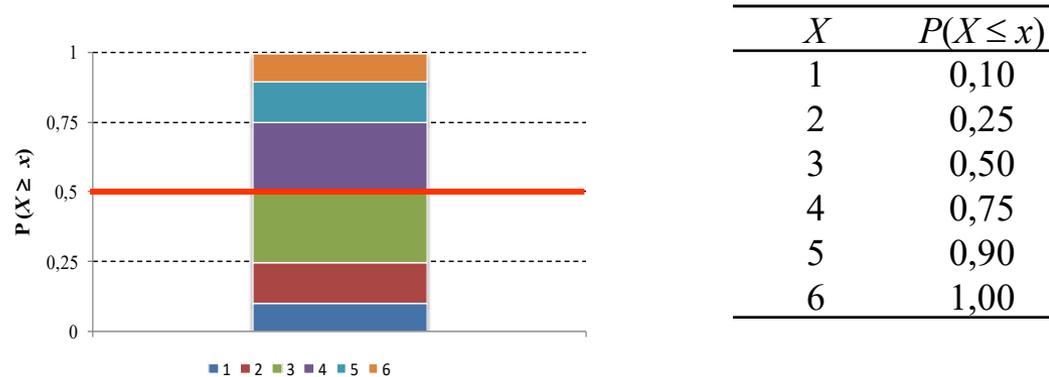
Medidas de Tendência Central



- Identificar o ponto que divide a distribuição em duas partes iguais (equiprováveis)
Mediana

$$\text{mediana} = 2$$

Medidas de Tendência Central



- Identificar o ponto que divide a distribuição em duas partes iguais (equiprováveis)
Mediana

$$\text{mediana} = 3,5$$

Medidas de Tendência Central

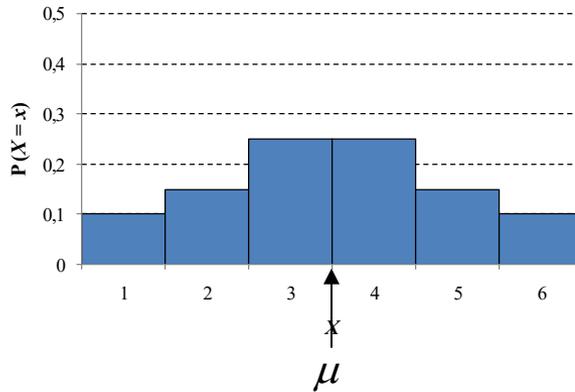
Mediana

$$P(X \leq \text{mediana}) \geq 0,5 \text{ e } P(X \geq \text{mediana}) \geq 0,5 \quad \text{v.a. discretas}$$

$$\int_{-\infty}^{\text{mediana}} f(x) dx = 0,5 \quad \text{v.a. contínuas}$$

- Pode ser usada diretamente em variáveis cuja mensuração seja pelos menos ordinal ✓
- Não sofre influência de valores extremos (muito baixos ou muito altos com baixa prob.) ✓
- Pode não representar valores possíveis para v.a. discreta ✗
- Possui limitações para manipulação algébrica ✗

Medidas de Tendência Central



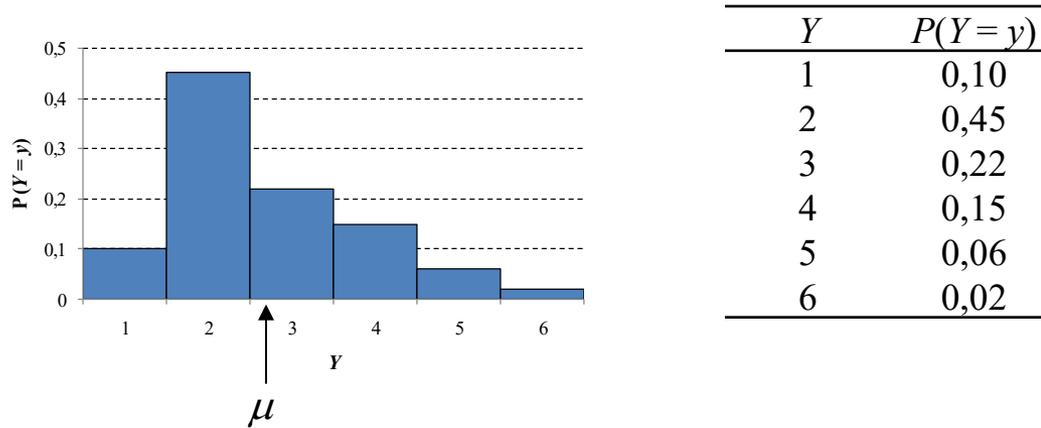
X	$P(X=x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

- Calcular o ponto de equilíbrio da distribuição
Média

$$\mu = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i) \quad (\text{trata-se de uma média ponderada pela probabilidade de cada valor})$$

$$\mu = 1*0,10 + 2*0,15 + 3*0,25 + 4*0,25 + 5*0,15 + 6*0,10 = 3,5$$

Medidas de Tendência Central



- Calcular o ponto de equilíbrio da distribuição
Média

$$\mu = \sum_{i=1}^N y_i P(Y = y_i)$$

$$\mu = 1 * 0,10 + 2 * 0,45 + 3 * 0,22 + 4 * 0,15 + 5 * 0,06 + 6 * 0,02 = 2,68$$

Medidas de Tendência Central

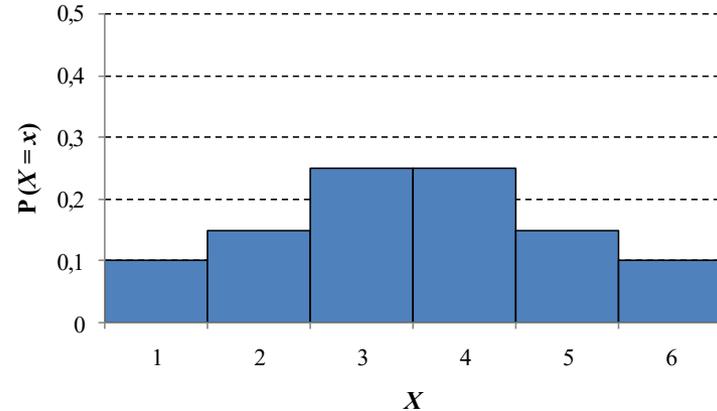
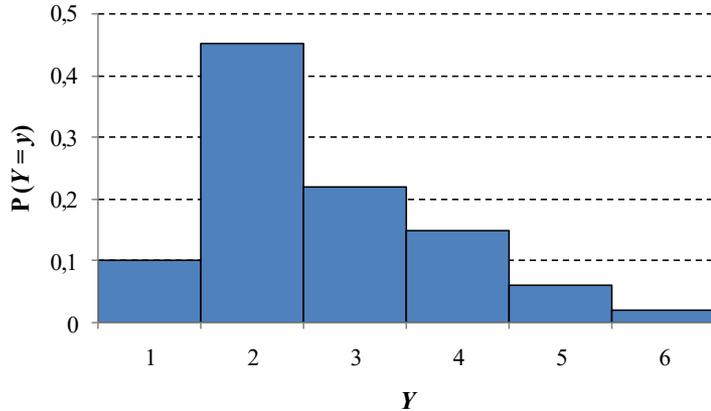
Média

$$\mu = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i) \quad \text{v.a. discretas}$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad \text{v.a. contínuas}$$

- Permite manipulações algébricas ✓
- Pode não representar valores possíveis para v.a. discreta ✗
- Sofre forte influência de valores extremos ✗
- Em distribuições simétricas unimodais, média = mediana = moda

Medidas de Dispersão



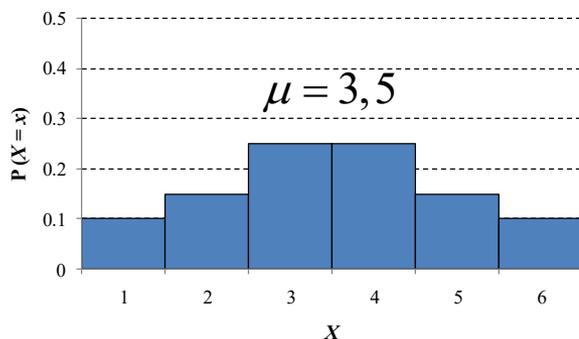
- Analisar a variação total da v.a.

$$Y_{\max} - Y_{\min} = 5$$

$$X_{\max} - X_{\min} = 5$$

Amplitude Total

Medidas de Dispersão



$X - \mu$	X	$P(X = x)$
-2,5	1	0,10
-1,5	2	0,15
-0,5	3	0,25
0,5	4	0,25
1,5	5	0,15
2,5	6	0,10

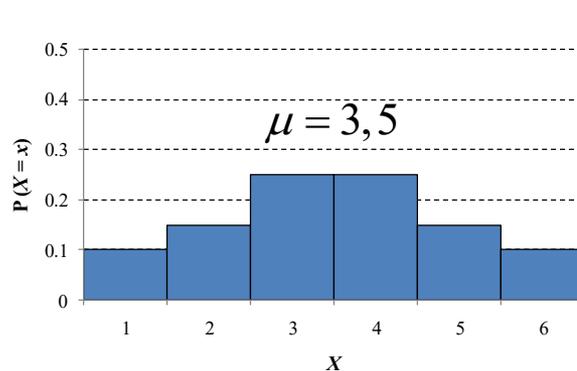
- Analisar a média dos desvios da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)P(X = x_i) = -2,5 * 0,10 - 1,5 * 0,15 - 0,5 * 0,25 + \\ + 0,5 * 0,25 + 1,5 * 0,15 + 2,5 * 0,10 = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)P(X = x_i) = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i) - \sum_{i=1}^N \mu P(X = x_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i)}_{= \mu} - \mu \underbrace{\sum_{i=1}^N P(X = x_i)}_{= 1} \\ = \mu - \mu = 0$$

Sempre será zero!

Medidas de Dispersão



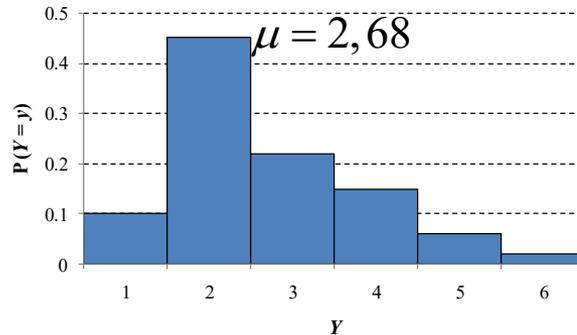
$ X - \mu $	X	$P(X=x)$
2,5	1	0,10
1,5	2	0,15
0,5	3	0,25
0,5	4	0,25
1,5	5	0,15
2,5	6	0,10

- Analisar média dos desvios absolutos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^N |x_i - \mu| P(X = x_i) = 2,5 * 0,10 + 1,5 * 0,15 + 0,5 * 0,25 + 0,5 * 0,25 + 1,5 * 0,15 + 2,5 * 0,10 = \mathbf{1,2}$$

Desvio Absoluto Médio

Medidas de Dispersão



$ Y - \mu $	Y	$P(Y = y)$
1,68	1	0,10
0,68	2	0,45
0,32	3	0,22
1,32	4	0,15
2,32	5	0,06
3,32	6	0,02

- Analisar a média dos desvios absolutos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^N |y_i - \mu| P(Y = y_i) = \mathbf{0,948}$$

Desvio Absoluto Médio

Medidas de Dispersão

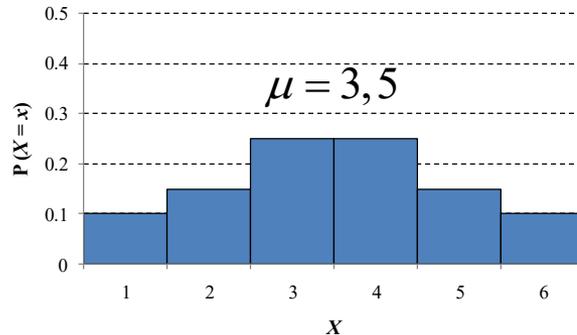
Desvio Absoluto Médio

$$DAM = \sum_{i=1}^N |x_i - \mu| P(X = x_i) \quad \text{v.a. discretas}$$

$$DAM = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| f(x) dx \quad \text{v.a. contínuas}$$

- Possui a mesma unidade da média e da v.a. ✓
- Apresenta o inconveniente de ser de difícil manipulação algébrica ✗

Medidas de Dispersão



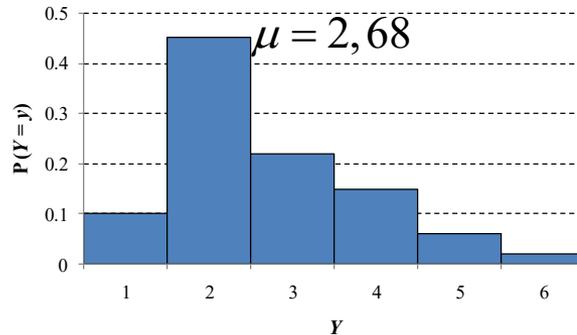
$(X - \mu)^2$	X	P(X=x)
6,25	1	0,10
2,25	2	0,15
0,25	3	0,25
0,25	4	0,25
2,25	5	0,15
6,25	6	0,10

- Analisar a média dos desvios quadráticos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = 6,25 * 0,10 + 2,25 * 0,15 + 0,25 * 0,25 + 0,25 * 0,25 + 2,25 * 0,15 + 6,25 * 0,10 = \mathbf{2,05}$$

Variância (σ^2)

Medidas de Dispersão



$(Y - \mu)^2$	Y	$P(Y = y)$
2,822	1	0,10
0,462	2	0,45
0,102	3	0,22
1,742	4	0,15
5,382	5	0,06
11,022	6	0,02

- Analisar a média dos desvios quadráticos da v.a. (em relação à média)

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2 P(Y = y_i) = \mathbf{1,318}$$

Variância (σ^2)

Medidas de Dispersão

Variância

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) \quad \text{v.a. discretas}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad \text{v.a. contínuas}$$

- Pode ser manipulada algebricamente ✓
- Valores não são facilmente interpretados ✗
- Possui a unidade da v.a. ao quadrado (Ex. X em $^{\circ}\text{C}$, σ^2 em $^{\circ}\text{C}^2$) ✗

Desvio Padrão (σ) é a raiz quadrada da **Variância**
 σ possui a mesma unidade de X

Medidas de Dispersão

Quando duas ou mais variáveis são comparadas quanto a sua dispersão, a variância (ou o desvio padrão) não pode ser utilizada se estas variáveis possuírem diferentes unidades. Exemplo: X é altura (m) e Y é biomassa (kg)

Neste caso, adota-se uma medida adimensional:

Coeficiente de Variação

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

- Mede a variação relativa a média
- Adimensional
- Pode ser expresso em porcentagem (mas pode ter valores maiores que 100%)
- Não pode ser utilizado quando $\mu = 0$ ✘

Momentos

Uma v.a. pode também ser caracterizada através dos **momentos**, calculados a partir de sua distribuição

Momento (ordinário) ou **Esperança** (matemática) de ordem k :

v.a. discreta

$$E(X^k) = \sum_{i=1}^N x_i^k P(X = x_i)$$

v.a. contínua

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

lê-se: k -ésimo momento de X ou Esperança (matemática) da k -ésima potência de X

Momento centrado (na média) de ordem k

v.a. discreta

$$E((X - \mu)^k) = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^k P(X = x_i)$$

v.a. contínua

$$E((X - \mu)^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx$$

OBS: $\mu = E(X)$ média = 1º momento = esperança (matemática) = valor esperado de X

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E((X - \mu)^2) \text{ variância} = 2^\circ \text{ momento centrado} = \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ esperança da diferença quadrática de } X \text{ em relação a média} \end{aligned}$$

Outras medidas

Quantil

quartil (Q_i): divide a distribuição em 4 partes equiprováveis (mediana = 2º quartil)

distância interquartil: 3º quartil - 1º quartil (prob = 50%)

decil (D_i): divide a distribuição em 10 partes equiprováveis (mediana = 5º decil)

percentil (P_i): divide a distribuição em 100 partes equiprováveis (mediana = 50º percentil)

Curtose (achatamento)

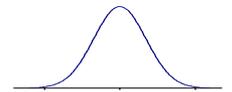
$$C = \frac{E((X - \mu)^4)}{[E((X - \mu)^2)]^2}$$

$$C' = \frac{Q_3 - Q_1}{2(D_9 - D_1)}$$

$C = 3$ ou $C' = 0,263$ mesocúrtica (distr. Normal)

$C < 3$ ou $C' < 0,263$ platicúrtica

$C > 3$ ou $C' > 0,263$ leptocúrtica



OBS: **Excesso de curtose** = $C - 3$ ou $C' - 0,263$ (mede a diferença em relação à distr. Normal)

Assimetria (obliquidade)

$$A = \frac{E((X - \mu)^3)}{[E((X - \mu)^2)]^{3/2}}$$

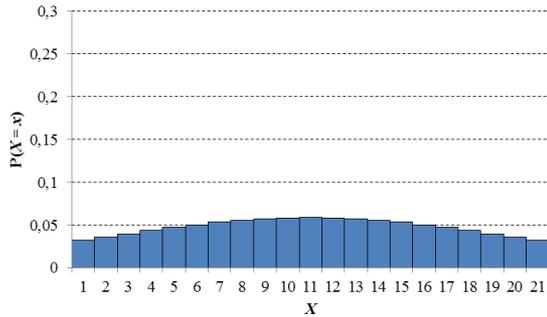
$$A' = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Mediana}{Q_3 - Q_1}$$

$A = 0$ ou $A' = 0$ simétrica

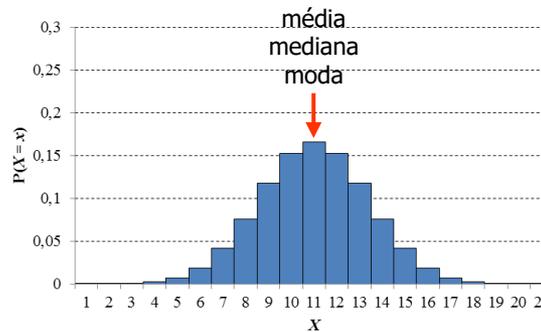
$A < 0$ ou $A' < 0$ assimétrica à esquerda
(média < mediana < moda)

$A > 0$ ou $A' > 0$ assimétrica à direita
(média > mediana > moda)

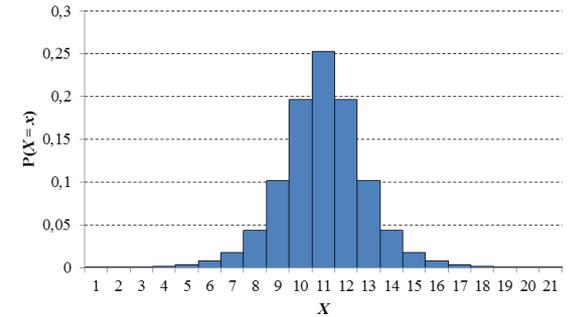
Assimetria e Curtose



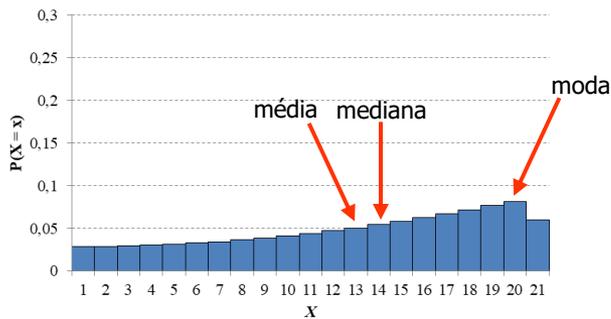
$A = 0$ (simétrica)
 $C = 1,99$ (platicúrtica)



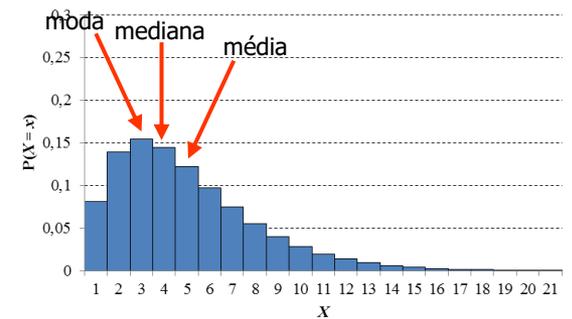
$A = 0$ (simétrica)
 $C = 3$ (mesocúrtica)



$A = 0$ (simétrica)
 $C = 5,01$ (leptocúrtica)



$A = -0,45$ (assimétrica à esquerda)
 $C = 2,06$ (platicúrtica)



$A = 1,19$ (assimétrica à direita)
 $C = 4,77$ (leptocúrtica)

Transformação e Combinação de V.A.

Suponha que uma v.a. seja obtida através de uma transformação de uma outra v.a. ou através da combinação de várias v.a. É possível conhecer a média (esperança) e a variância desta nova v.a. em função da(s) média(s) e variância(s) da(s) v.a. da(s) qual(is) ela se originou?

Principais transformações/combinações:

$$Y = X \pm o$$

$$Y = gX \quad \text{onde } o \text{ e } g \text{ são constantes}$$

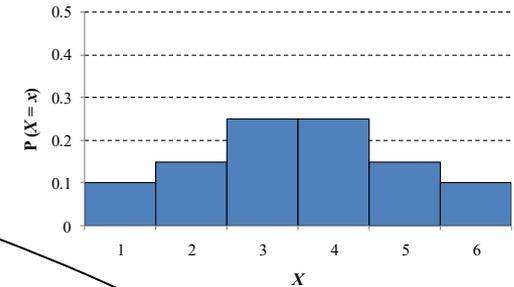
$$Y = X \pm W$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$



$\bullet Y = X + o$

Ex: $Y = X + 3$

Y	4	5	6	7	8	9
X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(Y) = 4*0,10 + 5*0,15 + \dots + 9*0,10 = 6,5$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 44,3 - 42,25 = 2,05$$

+ 3

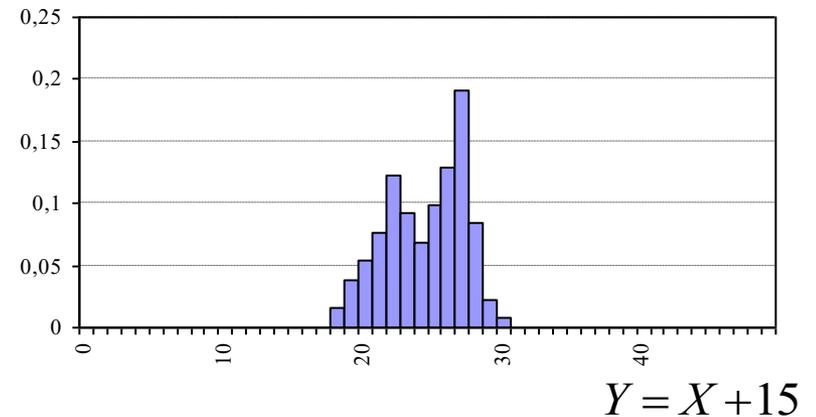
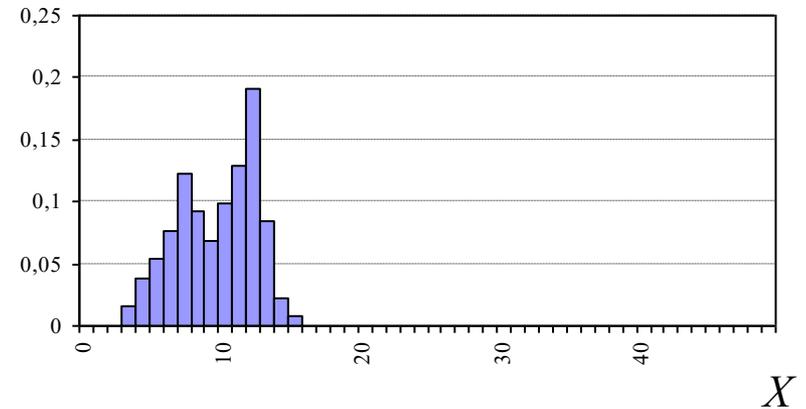
=

Propriedades da Esperança e Variância

$$Y = X \pm o$$

$$E(Y) = E(X \pm o) = E(X) \pm o$$

$$Var(Y) = Var(X \pm o) = Var(X)$$

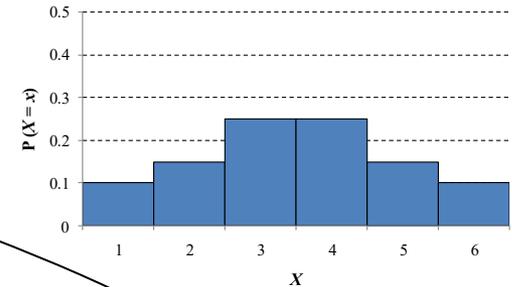


Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$



• $Y = gX$

Ex: $Y = 3X$

Y	3	6	9	12	15	18
X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(Y) = 3*0,10 + 6*0,15 + \dots + 18*0,10 = 10,5$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 128,7 - 110,25 = 18,45$$

* 3

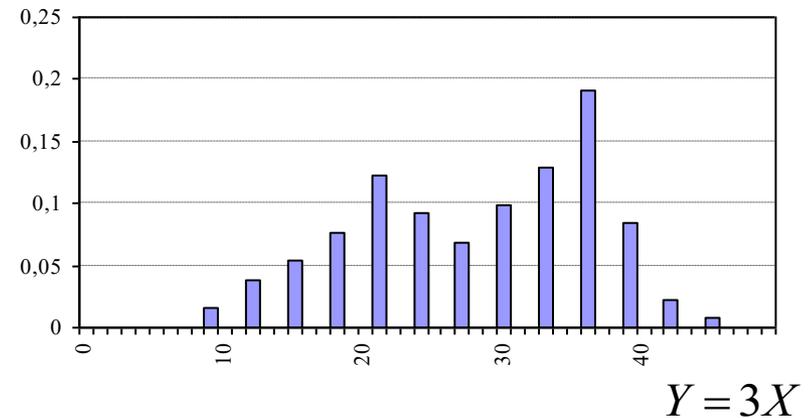
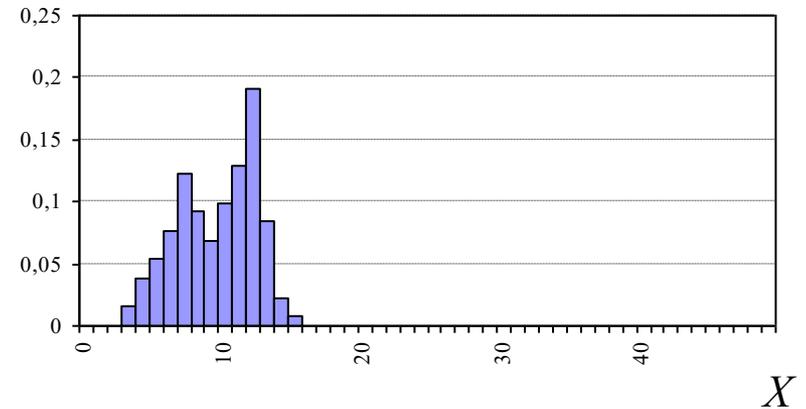
* 9 = 3²

Propriedades da Esperança e Variância

$$Y = gX$$

$$E(Y) = E(gX) = gE(X)$$

$$Var(Y) = Var(gX) = g^2Var(X)$$



Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$$E(W) = 2,68$$

$$Var(W) = 1,318$$

$\bullet Y = X + W$

$$Y = \{2, \dots, 12\}$$

Distribuição Conjunta de X e W

$W \backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$W \backslash X$	1	2	3	4	5	6	$P(W=w_i)$
1							0,10
2							0,45
3							0,22
4							0,15
5							0,06
6							0,02
$P(X=x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$P(Y = 3) = P(X = 1; W = 2) + P(X = 2; W = 1)$$

$$P(X = 1; W = 2) = ?$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$$E(W) = 2,68$$

$$Var(W) = 1,318$$

$\bullet Y = X + W$

$$Y = \{2, \dots, 12\}$$

Distribuição Conjunta de X e W

$W \backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$W \backslash X$	1	2	3	4	5	6	$P(W=w_i)$
1	0,010	0,015	0,025	0,025	0,015	0,010	0,10
2	0,045	0,0675	0,1125	0,1125	0,0675	0,045	0,45
3	0,022	0,033	0,055	0,055	0,033	0,022	0,22
4	0,015	0,0225	0,0375	0,0375	0,0225	0,015	0,15
5	0,006	0,009	0,015	0,015	0,009	0,006	0,06
6	0,002	0,003	0,005	0,005	0,003	0,002	0,02
$P(X=x_j)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$P(Y = 3) = P(X = 1; W = 2) + P(X = 2; W = 1)$$

$$P(X = 1; W = 2) = P(X = 1)P(W = 2) \quad \text{considerando que } X \text{ e } W \text{ sejam independentes}$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$$E(W) = 2,68$$

$$Var(W) = 1,318$$

$$\bullet Y = X \ominus W$$

$$E(Y) = \sum_i y_i P(Y = y_i)$$

$$E(X \ominus W) = \sum_i \sum_j (x_i \ominus w_j) P(X = x_i; W = w_j)$$

$$= \sum_i \sum_j x_i P(X = x_i; W = w_j) \ominus \sum_i \sum_j w_j P(X = x_i; W = w_j)$$

$$= \sum_i x_i \sum_j P(X = x_i; W = w_j) \ominus \sum_j w_j \sum_i P(X = x_i; W = w_j)$$

$$= \sum_i x_i P(X = x_i) \ominus \sum_j w_j P(W = w_j)$$

$$= E(X) \ominus E(W) = 3,5 - 2,68 = 0,82$$

$w \backslash X$	1	2	3	4	5	6	$P(W=w_i)$
1	0,010	0,015	0,025	0,025	0,015	0,010	0,10
2	0,045	0,0675	0,1125	0,1125	0,0675	0,045	0,45
3	0,022	0,033	0,055	0,055	0,033	0,022	0,22
4	0,015	0,0225	0,0375	0,0375	0,0225	0,015	0,15
5	0,006	0,009	0,015	0,015	0,009	0,006	0,06
6	0,002	0,003	0,005	0,005	0,003	0,002	0,02
$P(X=x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$E(X \pm W) = E(X) \pm E(W)$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$$E(W) = 2,68$$

$$Var(W) = 1,318$$

$\bullet Y = X + W$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$\begin{aligned}
 Var(X + W) &= E((X + W)^2) - (E(X + W))^2 \\
 &= E(X^2 + 2XW + W^2) - (E(X) + E(W))^2 \\
 &= E(X^2) + 2E(XW) + E(W^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(W) - E(W)^2 \\
 &= \underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{Var(X)} + \underbrace{E(W^2) - E(W)^2}_{Var(W)} + 2\underbrace{(E(XW) - E(X)E(W))}_{COV(X,W)}
 \end{aligned}$$

covariância entre X e W

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$$E(W) = 2,68$$

$$Var(W) = 1,318$$

$$\bullet Y = X + W$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$\begin{aligned} Var(X + W) &= E((X + W)^2) - (E(X + W))^2 \\ &= E(X^2 + 2XW + W^2) - (E(X) + E(W))^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XW) + E(W^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(W) - E(W)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + E(W^2) - E(W)^2 + 2(E(XW) - E(X)E(W)) \end{aligned}$$

$$Var(X + W) = Var(X) + Var(W) + 2COV(X, W)$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(X) = 3,5$$

$$Var(X) = 2,05$$

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$$E(W) = 2,68$$

$$Var(W) = 1,318$$

$$\bullet Y = X - W$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$\begin{aligned} Var(X - W) &= E((X - W)^2) - (E(X - W))^2 \\ &= E(X^2 - 2XW + W^2) - (E(X) - E(W))^2 \\ &= E(X^2) - 2E(XW) + E(W^2) - E(X)^2 + 2E(X)E(W) - E(W)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 + E(W^2) - E(W)^2 - 2(E(XW) - E(X)E(W)) \end{aligned}$$

$$Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W) \pm 2COV(X, W)$$

se X e W são independentes: $E(XW) = E(X)E(W) \therefore$

$$Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W)$$

$$Var(X \pm W) = 2,05 + 1,318 = 3,368$$

Propriedades da Esperança e Variância

Resumo:

$$Y = X \pm o$$

$$E(Y) = E(X \pm o) = E(X) \pm o$$

$$Var(Y) = Var(X \pm o) = Var(X)$$

$$Y = gX$$

$$E(Y) = E(gX) = gE(X)$$

$$Var(Y) = Var(gX) = g^2Var(X)$$

$$Y = X \pm W$$

$$E(Y) = E(X \pm W) = E(X) \pm E(W)$$

$$Var(Y) = Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W) \pm 2COV(X, W)$$

$$Var(Y) = Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W) \quad (\text{independentes})$$

sempre soma!

Brilho e Contraste

Imagem original (I)

Banda TM3/Landsat



Em Processamento de Imagens, é comum se referir à média como **brilho** e variância como **contraste**.

Uma imagem de baixo brilho é uma imagem escura, ou seja, sua média é baixa. Por outro lado, uma imagem de alto brilho é uma imagem clara, com média alta.

Uma imagem de baixo contraste é uma imagem cujos alvos são de difícil distinção, possuindo baixa variância. Por outro lado, uma imagem de alto contraste possui alvos bem distintos (objetos claros e escuros), possuindo assim alta variância.

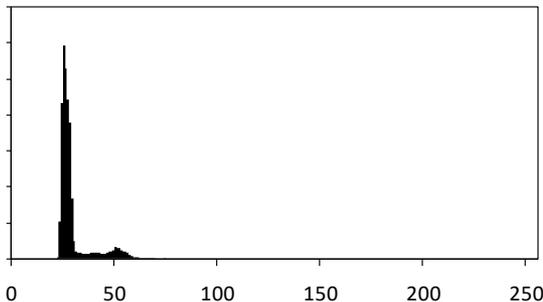
Brilho e Contraste

Imagem original (I)

Banda TM3/Landsat



Média: 29,07
Variância: 62,14



O **brilho** e o **contraste** de uma imagem podem ser alterados através de transformações aplicadas à imagem original.

A mais comum é a transformação linear, chamada de "Aumento Linear de Contraste":

$$I_{nova} = gI + o \quad (g = \text{ganho}, o = \text{offset})$$

Esta transformação é aplicada ao valor de cada pixel que compõe a imagem.

Em imagens coloridas (RGB), cada canal pode ter sua própria transformação.

Muitos sistemas aplicam esta transformação de forma interativa e visual, não se conhecendo de fato os valores de **ganho** e **offset** utilizados na transformação.

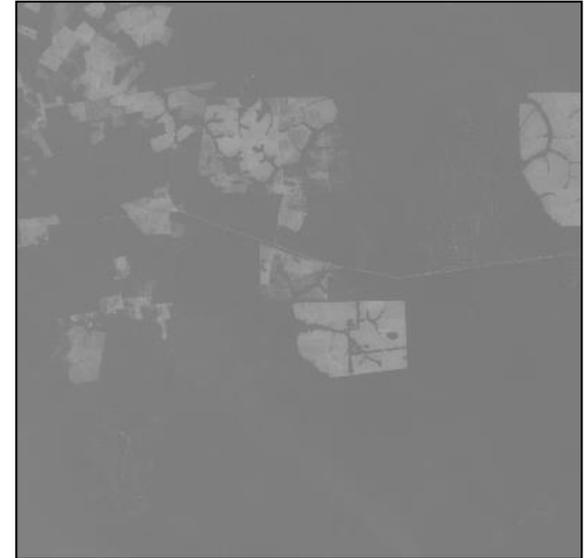
Alterando Offset...

Imagem original (I)

$$I_{nova} = I + 50$$

$$I_{nova} = I + 100$$

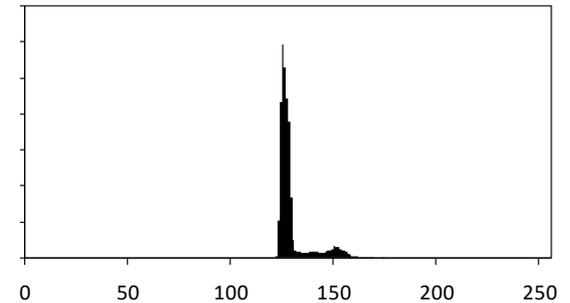
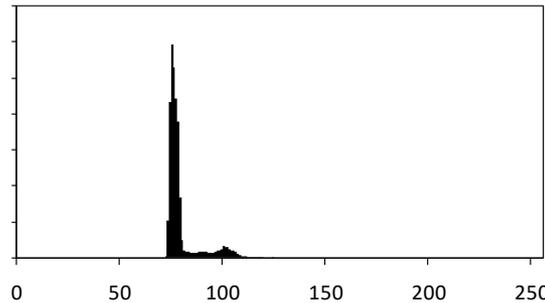
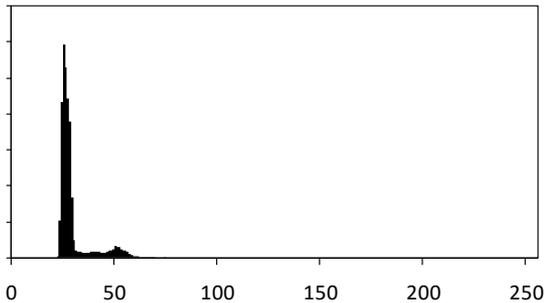
Banda TM3/Landsat



Média: 29,07
Variância: 62,14

Média: 79,07
Variância: 62,14

Média: 129,07
Variância: 62,14



Alterando Ganho...

Imagem original (I)

$$I_{nova} = 2 * I$$

$$I_{nova} = 4 * I$$

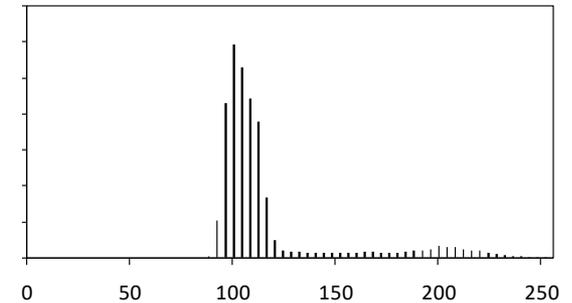
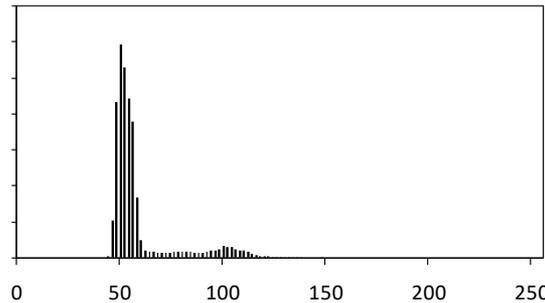
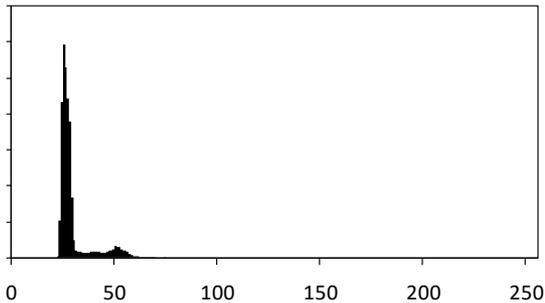
Banda TM3/Landsat



Média: 29,07
Variância: 62,14

Média: 58,14
Variância: 248,55

Média: 116,29
Variância: 994,21



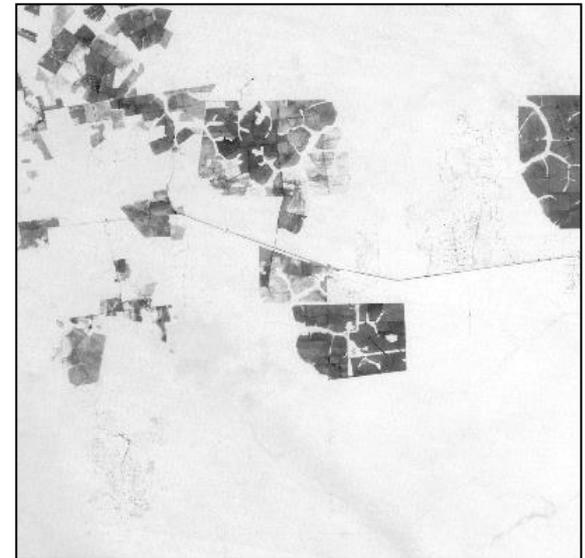
Alterando Ganho e Offset...

Imagem original (I)

$$I_{nova} = 5 * I - 110$$

$$I_{nova} = -5 * I + 370$$

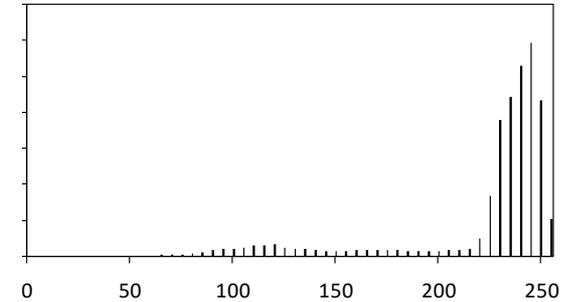
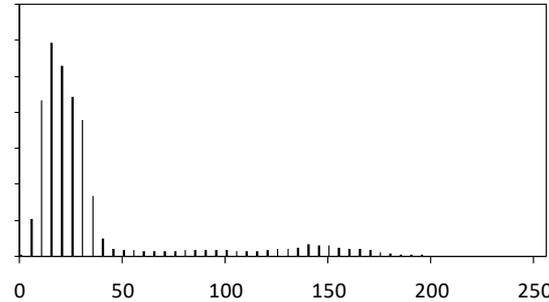
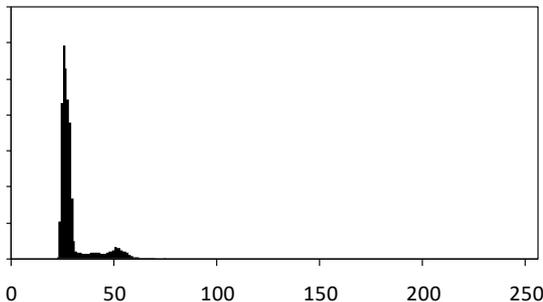
Banda TM3/Landsat



Média: 29,07
Variância: 62,14

Média: 35,36
Variância: 1553,45

Média: 224,64
Variância: 1553,45



Aplicações em Imagens

- alterar brilho (**média**)
- alterar contraste (**variância**)

$$I_{nova} = gI + o$$

Exemplo 1: Tem-se uma imagem qualquer com média 100 e variância 150. Deseja-se aumentar o contraste dessa imagem, aumentando-se sua variância para 600. Qual deve ser o ganho aplicado nessa imagem? Qual será a média da imagem após a aplicação desse ganho?

$$Var(I_{nova}) = g^2 Var(I)$$

$$600 = g^2 150$$

$$g^2 = \frac{600}{150}$$

$$g = \sqrt{4} = 2$$

$$E(I_{nova}) = gE(I)$$

$$= 2 \times 100 = 200$$

Aplicações em Imagens

- alterar brilho (**média**)
- alterar contraste (**variância**)

$$I_{nova} = gI + o$$

Exemplo 2: Tem-se uma imagem qualquer com média 100 e variância 150. Deseja-se aumentar o contraste dessa imagem, aumentando-se sua variância para 600, sem alterar seu brilho (ou seja, mantendo a média em 100). Quais devem ser o ganho e o offset aplicados nessa imagem?

$$Var(I_{nova}) = g^2 Var(I)$$

$$E(I_{nova}) = gE(I) + o$$

$$600 = g^2 150$$

$$100 = 2 \times 100 + o$$

$$g^2 = \frac{600}{150}$$

$$o = 100 - 200 = -100$$

$$g = \sqrt{4} = 2$$

$$I_{nova} = 2I - 100$$

Aplicações em Imagens

Observações:

- A aplicação de um ganho e um offset sobre uma imagem representada por inteiros como, por exemplo, imagens de 8 bits (256 níveis de cinza), pode resultar em valores não inteiros.

Exemplo: $I_{nova} = 1,29 \times I - 45,7$

Se $I = 78$ então $I_{nova} = 54,92$

Este resultado pode ser convertido para inteiro por truncamento ou por arredondamento, ou seja, para 54 ou 55 respectivamente

- O resultado pode estar fora do escopo permitido para aquele tipo de imagem

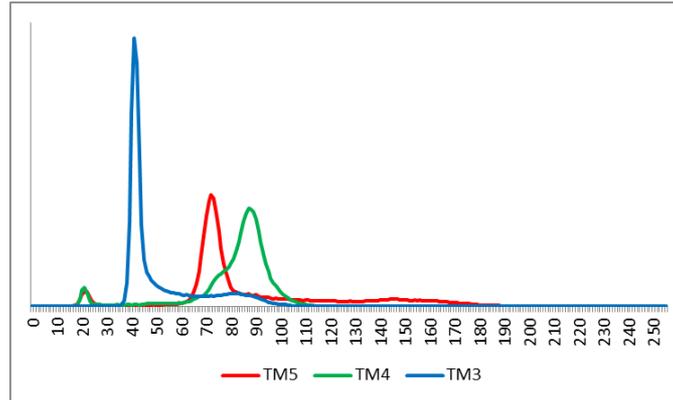
Se $I = 249$ então $I_{nova} = 275,51$

Se $I = 10$ então $I_{nova} = -32,8$

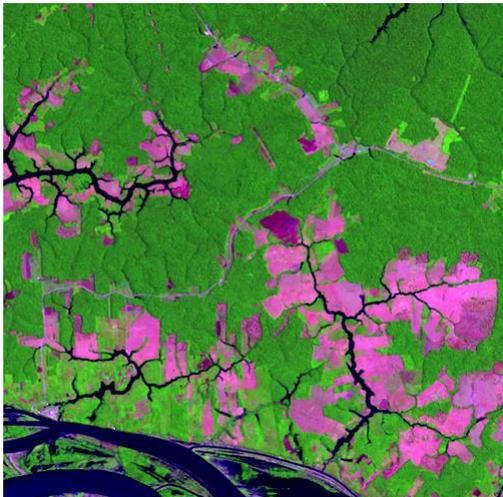
Geralmente, estes resultados são "saturados" no zero (se negativo) ou 255 (se maior que 255).

- Nesses casos, os valores de média e variância da imagem resultante podem não corresponder aos valores teóricos.

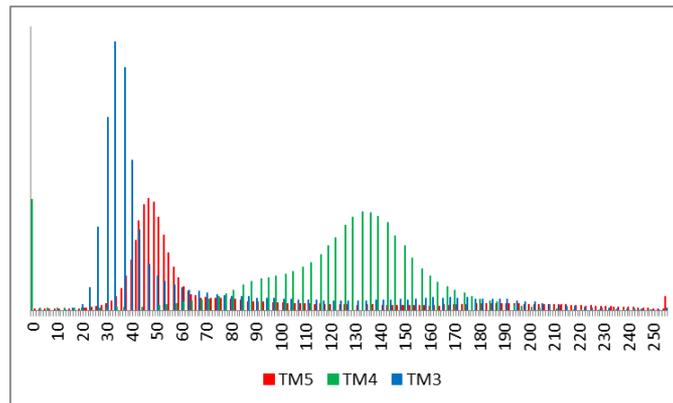
Aplicações em Imagens



	Min	Max	Média	Desv.Pad.
TM5	8	235	88,10	34,30
TM4	15	145	81,47	16,95
TM3	32	212	51,28	16,09



	ganho	offset
TM5	1,903	-89,440
TM4	3,400	-163,200
TM3	3,355	-104,013



Teórico	Min	Max	Média	Desv.Pad.
TM5	-74,22	357,76	78,22	65,27
TM4	-112,20	329,80	113,81	57,64
TM3	3,36	607,30	68,04	53,98

Real	Min	Max	Média	Desv.Pad.
TM5	0	255	80,29	61,44
TM4	0	255	118,19	44,04
TM3	3	255	67,75	53,82